UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 12

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
2 de octubre de 2024

---

1. La función gamma se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

de donde se sabe que converge si $\alpha > 0$.

a) Use integración por parte para mostrar que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0$$

b) Muestre que $\Gamma(n + 1) = n!$ con $n \in \mathbb{N}$.

c) Usando lo visto en clases y la parte (b) se tiene que

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad s > 0$$

se cumple para cualquier α entero no negativo. Muestre que la fórmula también es valida para un real $\alpha > -1$.

2. Se define la función por partes unitaria $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{, si } t < 0 \\ 1 & \text{, si } t \geq 0 \end{cases}$$

y si la discontinuidad ocurre en $t = a$ se denota como

$$h(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{, si } t < a \\ 1 & \text{, si } t \geq a \end{cases}$$

a) **(Primer Teorema de Traslación)** Sea F la transformada de Laplace de f, demuestre que

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} f(t)$$

b) Cuando $f(t)$ tiene transformada de Laplace y $h(t - a)$ definida como en el enunciado, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)h(t - a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t + a)\}$$

c) Use lo anterior para encontrar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{, si } 0 \leq t < 2 \\ t - 3 & \text{, si } t \geq 2 \end{cases}$$

d) **(Segundo Teorema de Traslación)** Si $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)h(t-a)$$

e) Use lo anterior para encontrar la inversa de la transformada de Laplace de $F(s) = \dfrac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$.

1. La función gamma se define como

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

de donde se sabe que converge si $\alpha>0$.

a) Use integración por parte para mostrar que

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\quad \alpha>0$$

Tenemos que

$u=x^{\alpha}$

$v=-e^{-x}$

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}dx=-x^{\alpha}e^{-x}-\int_0^\infty -e^{-x}\alpha\cdot x^{\alpha-1}dx$$
$$=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha)$$

b) Muestre que $\Gamma(n+1)=n!$ con $n\in\mathbb{N}$.

Lo haremos por inducción,

$n=1$ $\quad\Gamma(1+1)=1\cdot\Gamma(1)=1\cdot 1=1!$

Usando el item anterior

$n=2$ $\quad\Gamma(2+1)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1=2!$

Supongamos que para algún $n\in\mathbb{N}$ se cumple que $\Gamma(n+1)=n!$, debemos probar que $\Gamma((n+1)+1)=(n+1)!$, tenemos

$$\Gamma((n+1)+1)=(n+1)\Gamma(n+1)=(n+1)n!=(n+1)!$$

c) Usando lo visto en clases y la parte (b) se tiene que

$$\mathcal{L}(t^{\alpha})(s)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\quad s>0$$

se cumple para cualquier α entero no negativo. Muestre que la fórmula también es valida para un real $\alpha>-1$.

Lo que vieron en clases es que para $n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\mathcal{L}(t^{n})(s)=\frac{n!}{s^{n+1}}\quad\forall s>0$$

por lo tanto usando el item anterior

$$\mathcal{L}(t^{n})(s)=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\quad\forall s>0$$

Ahora probaremos que sirve para cualquier real $\alpha>-1$, tenemos

$u=st$

$du=sdt$

$$\mathcal{L}(t^{\alpha})(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha}dt=\int_0^\infty\frac{e^{-u}\cdot u^{\alpha}}{s^{\alpha+1}}du=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha}du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\quad\forall s>0$$

2. Se define la función por partes unitaria $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t < 0 \\ 1 & , \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

y si la discontinuidad ocurre en $t = a$ se denota como

$$h(t-a) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t < a \\ 1 & , \text{ si } t \geq a \end{cases}$$

a) **(Primer Teorema de Traslación)** Sea F la transformada de Laplace de f, demuestre que

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

Tenemos que

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) = F(s-a)$$

La otra igualdad es una relación de la transformada de Laplace y su inversa, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

b) Cuando $f(t)$ tiene transformada de Laplace y $h(t-a)$ definida como en el enunciado, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)h(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

Tenemos que

$$\mathcal{L}\{f(t)h(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) h(t-a)\, dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

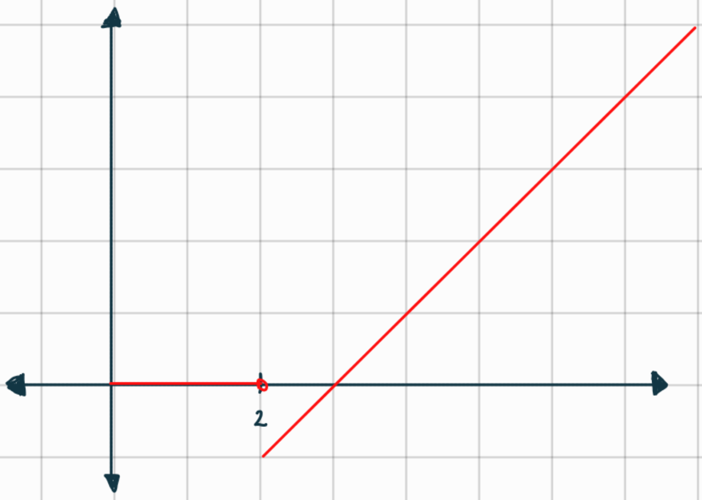
Haciendo un cambio de variable $t = t+a$ se tiene

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(t+a)} f(t+a)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-sa} f(t+a)dt = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-st} f(t+a)\, dt = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

c) Use lo anterior para encontrar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0 \leq t < 2 \\ t-3 & , \text{ si } t \geq 2 \end{cases}$$

Primero grafiquemos f



Usando la función definida antes podemos redefinir f como

$$f(t) = \overbrace{(t-3)}^{g(t)} h(t-2)$$

Por lo que ocupando el item anterior

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t-3)h(t-2)\} = e^{-2s}\cdot\mathcal{L}\{g(t+2)\} = e^{-2s}\cdot\mathcal{L}\{(t-1)\}$$
$$= e^{-2s}\cdot\left[\mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{1\}\right]$$
$$= e^{-2s}\cdot\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right]$$
$$= \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

d) **(Segundo Teorema de Traslación)** Si $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)h(t-a)$$

Usando (b) se tiene que

$$\mathcal{L}\{f(t)h(t-a)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)h(t-a)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-sa}F(s)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sa}F(s)\} = f(t-a)h(t-a)$$

e) Use lo anterior para encontrar la inversa de la transformada de Laplace de $F(s) = \dfrac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$.

Tenemos que

$$F(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = e^{-s}\cdot\frac{1}{s} - e^{-2s}\cdot\frac{1}{s}$$

Por lo tanto ocupando lo anterior

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\cdot\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\cdot\frac{1}{s}\right\}$$
$$= h(t-1) - h(t-2)$$