1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, pruebe que $e^A = \begin{pmatrix} cos(b) & sen(b) \\ -sen(b) & cos(b) \end{pmatrix}$.

Notemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^5 \\ -b^5 & 0 \end{pmatrix}$$

PD: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} b^{2n} & 0 \\ 0 & b^{2n} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & b^{2n+1} \\ -b^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$

Supongamos que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos que demostrar el caso n+1

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2n} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^2 = (-1)^n \begin{pmatrix} b^{2n} & 0 \\ 0 & b^{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} b^{2(n+1)} & 0 \\ 0 & b^{2(n+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^2 = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & b^{2n+1} \\ -b^{2n+1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 0 & b^{2(n+1)+1} \\ -b^{2(n+1)+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Así

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{2n!} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{2n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b) & \operatorname{sen}(b) \\ -\operatorname{sen}(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

2. Use lo anterior para hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + t \end{cases}$$

Es decir, debemos resolver

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Calculamos la solución para el sistema homogéneo, como es de coeficientes constantes, su solución es

$$z_h(t) = e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} K = \begin{pmatrix} \cos(-t) & \operatorname{sen}(-t) \\ -\operatorname{sen}(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} K \quad \text{donde } K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} K$$

Luego para debemos calcular

$$z_p(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds$$

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(s) & \text{sen}(s) \\ -\text{sen}(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} s\,\text{sen}(s) \\ s\cos(s) \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sen}(t) - t\cos(t) \\ \cos(t) + t\,\text{sen}(t) - 1 \end{pmatrix}$$

Luego la solución general es

$$z_h(t) + z_p(t)$$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = \overset{=A}{\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}} x(t)$$

a) Encuentre la solución general.

b) Realice el bosquejo del diagrama de fase.

a) Tenemos que la solución general del sistema es

$$x(t) = e^{At} K$$

Calculamos valores y vectores propios de A.

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 8 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(-2-\lambda) - 24$$
$$= (\lambda+4)(\lambda+2) - 24$$
$$= \lambda^2 + 6\lambda + 8 - 24 = \lambda^2 + 6\lambda - 16$$
$$= (\lambda+8)(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = -8$, $\ker(A+8I) = \langle(-2,1)\rangle$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 8y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{array}\right| \quad x = -2y$$

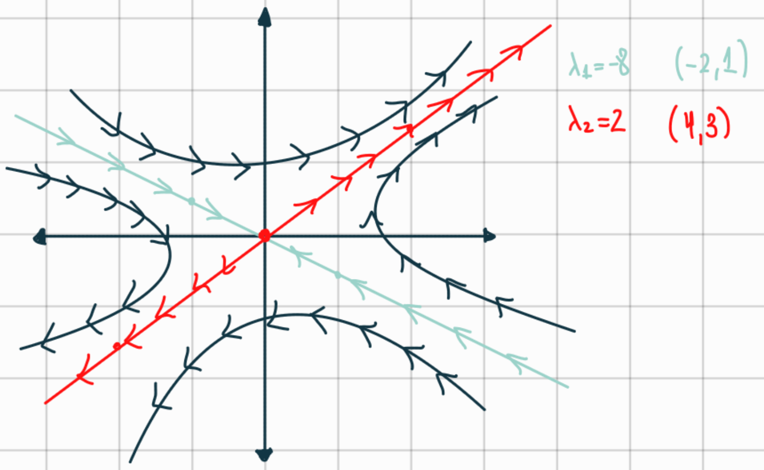
$\lambda_2 = 2$, $\ker(A-2I) = \langle(\frac{4}{3},1)\rangle = \langle(4,3)\rangle$

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6x + 8y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{array}\right| \quad x = \frac{4}{3}y$$

Es decir la solución general es $x(t) = P\begin{pmatrix} e^{-8t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} K$ donde $P = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Para el diagrama de fase tenemos $\lambda_1 = -8 < 0 < \lambda_2 = 2$, por lo que $(0,0)$ es punto silla



4. Considere la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$x''(t) - \frac{t}{t-1} x'(t) + \frac{1}{t-1} x(t) = 0$$

a) Encuentre la fórmula general de la ecuación sabiendo que una solución esta dada por $x_1(t) = e^t$.

b) Asuma que $x(0) < 0$ y $x'(0) > 0$. Demuestre que no existe ninguna solución del problema tal que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$$

a) Tenemos que una solución particular es $x_1(t) = e^t$, ocupando la fórmula de Abel

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{\int \frac{t}{t-1} dt}}{x_1^2(t)} dt$$
$$= e^t \int \frac{e^{\ln(t-1)+t}}{e^{2t}} dt$$
$$= e^t \int \frac{(t-1) \cdot e^t}{e^{2t}} dt$$
$$= e^t \int (t-1) e^{-t} dt$$
$$= e^t \int t e^{-t} - e^{-t} dt$$
$$= e^t \left[-(t+1) e^{-t} + e^{-t} \right]$$
$$= -(t+1) + 1 = -t$$

La solución general es

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$
$$= C_1 e^t + C_2 t$$

b) $x(0) < 0$ y $x'(0) > 0$

$$x(0) = C_1 < 0$$
$$x'(0) = C_1 + C_2 > 0 \implies C_1 > -C_2$$

Luego $\lim_{t \to \infty} C_1 e^t + C_2 t = -\infty$