



Ayudantía 6

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero

Profesora: Paulina Cecchi

4 de septiembre de 2024

1. Considere la matriz

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\pi}{t} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Para qué intervalos de $\mathbb{R}$ puede ser $\phi(t)$ matriz fundamental de una ecuación lineal homogénea?
- b) Construya dicha ecuación diferencial.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

- a) Comprobar que las funciones

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

forman un sistema fundamental de soluciones.

- b) Encontrar la matriz fundamental canónica en 0.

3. Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ continua tal que existe $M > 0$ con

$$\|A(t)\| \leq M \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$$

con $x(t)$ solución de $x' = A(t)x$.

- a) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, encuentre el sistema de ecuación diferencial que satisface $y_\lambda(t) = e^{-\lambda t}x(t)$.
- b) Demuestre que la función $\varphi(t) = \|y_\lambda(t)\|^2$ es derivable y que

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) \leq (M - \lambda)\varphi(t) \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$$

- c) Hallar los valores de λ para los cuales $y_\lambda(t)$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

4. Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$