1.- Calcule la matriz hessiana de la función dada por $z(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$. Verifique que satisface la ecuación

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

2.- Demuestre que la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no verifica las hipótesis ni la conclusión del teorema de Schwarz, es decir, compruebe que las segundas derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

3.- Encuentre los puntos críticos de las sgtes funciones y determine cuáles son máximos, mínimos locales o puntos silla

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

b) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \arctan(x^2) - \arctan(y^2)$

4.- Una empresa produce dos bienes, sean x e y las unidades respectivas producidas. La empresa recibe 10 UTM por cada unidad x vendida y

20 UTM por cada unidad de y vendida; asuma que siempre se vende la totalidad de la producción. Si el costo de producir estas unidades es $C(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2$, obtener el valor del par (x,y) que maximice el beneficio de la empresa.

1.- Encuentre el punto en la recta $2x+5y=10$ en $\mathbb{R}^2$ que está a menor distancia de la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1$.

2.- Considere todas las funciones lineales $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\int_0^1\int_0^1 (L(x,y))^2\,dx\,dy = 1$. Encuentre la función lineal que minimice la integral $\int_0^1\int_0^1 L(x,y)\,dx\,dy$

3.- Encuentre y justifique la existencia de los valores máximos y mínimos de las sgtes funciones.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 10y^2$ en el disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 4\}$

b) $g(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$ en el disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 4\}$

Solución 1): Primero note que la recta no intersecta con la circunferencia, pues un punto en la recta es de la forma $(x, 2-\frac{2}{5}x)$, demostraremos que $x^2 + (2-\frac{2}{5}x)^2 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

esto pasa si y solo si $\quad x^2+4-\frac{8}{5}x+\frac{4}{25}x^2>1$

$$\Leftrightarrow \frac{29}{25}x^2-\frac{8}{5}x+3>0$$

y note que esto es un polinomio de grado 2 con discriminante $\left(\frac{-8}{5}\right)^2-4\cdot\frac{29}{25}\cdot 3<0$, luego no tiene raíces reales y evaluando en un punto cualquiera, por ejemplo $x=0$ vemos que $\frac{29}{25}\cdot 0^2-\frac{8}{5}\cdot 0+3=3>0$, luego concluimos que $\frac{29}{25}x^2-\frac{8}{5}x+3>0 \Rightarrow x^2+\left(2-\frac{2}{5}x\right)^2>1$, y entonces la recta pasa por fuera de la circunferencia, para encontrar el punto más cercano, buscamos el punto de la recta tal que su norma $\|\|_2$ esté más cerca de 1, y esto es equivalente a buscar el punto de la recta que minimiza la función x^2+y^2-1. Si (x_0,y_0) es tal mínimo entonces existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0), \quad g(x_0,y_0)=0$$

con $f(x,y)=x^2+y^2-1$, $g(x,y)=2x+5y-10$.

$$\Rightarrow (2x,2y)=\lambda(2,5), \quad 2x+5y-10=0$$

$$\Rightarrow 2x=2\lambda, \quad 2y=5\lambda, \quad 2x+5y-10=0$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales con una única solución, que es $x=\frac{20}{29}$, $y=\frac{50}{29}$, $\lambda=$ algo

Concluimos que el punto de la recta que está más cerca de la circunferencia es $\left(\frac{20}{29}, \frac{50}{29}\right)$.

(Un buen ejercicio es graficar esto, y ver que efectivamente este punto es el más cercano a la circunferencia)

Hint para el 2): las funciones lineales $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de la forma $L(x,y) = ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $(L(x,y))^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$. Calcule entonces

$$\int_0^1 \int_0^1 L(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 ax+by\,dx\,dy$$

y

$$\int_0^1 \int_0^1 (L(x,y))^2\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2\,dx\,dy$$

Esto nos entregará dos funciones en función de a y b.

Y entonces traducimos este problema a minimizar una función con alguna restricción $\square$