Ayudantía 3

1.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función acotada. Pruebe que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,xy = 0$$

Solución: Para demostrar esto probaremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ entonces $|f(x,y)\,xy - 0| < \varepsilon$.

Como f es una función acotada existe $M > 0$ tal que $|f(x,y)| < M$, luego dado $\varepsilon > 0$ si $|x| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}}$, $|y| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}}$

se cumple que $|f(x,y)\,xy| = |f(x,y)|\,|x|\cdot|y| < M\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}} = \varepsilon$

Luego $|f(x,y)\,xy| < \varepsilon$. Entonces escogemos $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}}$ y usando

la norma $\|\cdot\|_\infty$ se cumple que si $\|(x,y)-(0,0)\|_\infty < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}}$ entonces $\|(x,y)\|_\infty < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}}$ y entonces $|x|, |y| \leq \max\{|x|,|y|\} < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}}$.

Y con lo visto anteriormente concluimos que si $\|(x,y)-(0,0)\|_\infty < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}}$ entonces $|f(x,y)\,xy - 0| < \varepsilon$ y por lo tanto
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,xy = 0$$ como queríamos $\square$

2.- Determine si existen los siguientes límites y de ser así calcule:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^5}{1+x^4y^4}$

Note que $\dfrac{x^4y^5}{1+x^4y^4} = \dfrac{x^4y^4}{1+x^4y^4} \cdot y$, y además como $0<1$ / $+x^4y^4$

$x^4y^4 < 1+x^4y^4$ (*) además $x^4y^4 \geq 0$, luego $1+x^4y^4 > 0$ y entonces podemos dividir a (*) y no cambia la desigualdad $0 \leq \dfrac{x^4y^4}{1+x^4y^4} < 1$, concluimos entonces que $\left|\dfrac{x^4y^4}{1+x^4y^4}\right| < 1$. Luego dado $\varepsilon > 0$ si consideramos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(x,y)-(0,0)\|_\infty < \varepsilon$ se cumple que $\|(x,y)\|_\infty < \varepsilon$ y entonces en particular $|y| < \varepsilon$. Como para cualquier $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $\left|\dfrac{x_0^4y_0^4}{1+x_0^4y_0^4}\right| < 1$ se tiene que $\left|\dfrac{x^4y^4}{1+x^4y^4}\right| \cdot |y| < 1\,\varepsilon = \varepsilon$.

Y entonces $\left|\dfrac{x^4y^5}{1+x^4y^4} - 0\right| < \varepsilon$, y entonces con esto podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^5}{1+x^4y^4} = 0$

PROARTE

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

Podemos hacer el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ con $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y entonces si el límite existe tenemos la siguiente igualdad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r^+\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{r^3\,\text{sen}^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta} = \lim_{\substack{r^+\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{r^3\,\text{sen}^3\theta}{r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}$$

$$= \lim_{\substack{r^+\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi)}} r\,\text{sen}^3\theta$$

Y como $|\text{sen}\,\theta| \leq 1$ entonces $|\text{sen}^3\theta| \leq 1$, luego esta función es acotada para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, además $\lim_{r^+\to 0} r = 0$, y entonces

podemos concluir que $\lim_{\substack{r^+\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi)}} r\,\text{sen}^3\theta = 0$. Y entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Si el límite existe entonces todo camino que tienda a $(0,0)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ debe tener el mismo límite.
Consideremos el camino $(t,0)$ este tiende a $(0,0)$ cuando t tiende a (0) y tenemos que

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0^2}{x^2+0^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Por otro lado si consideramos el camino (t^2, t) tenemos que

$$\lim_{(t^2,t)\to(0,0)} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego los límites no coinciden y por lo tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ no existe.

d) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 |y|}{(x-1)^2+y^2}$

Considere el cambio de coordenadas $x' = x-1$ $y' = y$ entonces si $(x,y)\to(1,0)$ se tiene que $(x',y')\to(0,0)$ y entonces

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 |y|}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{x'^2 |y'|}{x'^2+y'^2}$$

Y ahora nuevamente hagamos el cambio de coordenadas

$x' = r\cos\theta$, $y' = r\,\text{sen}\theta$ con $r>0$, $\theta\in[0,2\pi)$

PROARTE

Entonces $\displaystyle\lim_{(x',y)\to(0,0)} \frac{x'^2|y|}{x'^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0^+\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{r^2\cos^2\theta\,|r\,\text{sen}\,\theta|}{r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta}$

$$= \lim_{\substack{r\to 0^+\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{r^2\cos^2\theta\,|r\,\text{sen}\,\theta|}{r^2(\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta))} = \lim_{\substack{r\to 0^+\\ \theta\in[0,2\pi)}} \cos^2\theta\,|\text{sen}\,\theta|\,|r|$$

Como $|\cos\theta|\le 1$, $|\text{sen}\,\theta|\le 1$ entonces $|\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta|\le 1$ y entonces es acotado para todo $\theta\in[0,2\pi)$, además $\displaystyle\lim_{r\to 0^+}|r| = 0$, con esto podemos concluir que

$$\lim_{\substack{r\to 0^+\\ \theta\in[0,2\pi)}} \cos^2\theta\,|\text{sen}\,\theta|\,|r| = 0$$

Y por lo tanto concluimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2|y|}{(x-1)^2+y^2} = 0$

3.- Determine si las siguientes funciones son continuas

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ con

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^4+x^3y+y^4}{x^4+y^4},\ xy\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Veamos primero que pasa en el punto $(0,0)$. f es continua en $(0,0)$ si y sólo si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = (0,0)$.

Cuando calculamos el límite de la función en $(0,0)$ estamos considerando los puntos en un entorno del $(0,0)$ sin el mismo punto $(0,0)$, entonces aquí $f(x,y) = \left(\frac{x^4+x^3y+y^4}{x^4+y^4}, xy \right)$

luego si el límite existe se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^4+x^3y+y^4}{x^4+y^4}, xy \right)$$ y este límite

existe si existe el límite para cada coordenada, entonces

veamos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^3y+y^4}{x^4+y^4}$

Si consideramos el camino $(t,0)$ entonces si el límite existe tendría que ocurrir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^3y+y^4}{x^4+y^4} = \lim_{(t,0)\to(0,0)} \frac{t^4+t^3\cdot 0+0^4}{t^4+0^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4} = 1$$

Por otro lado considerando el camino (t,t) se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^3y+y^4}{x^4+y^4} = \lim_{(t,t)\to(0,0)} \frac{t^4+t^3\cdot t+t^4}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^4}{2t^4} = \frac{3}{2}$$

Como $1 \neq \frac{3}{2}$ vemos que el límite no existe y entonces

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, luego f no es continua en

el punto $(0,0)$ $\square$

PROARTE

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y(y-4) + 4)}{x^2 + y(y-4) + 4} & \text{si } (x,y) \neq (0,2) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,2) \end{cases}$

Recuerdo que por teorema de L'hopital

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t}{1} = \cos(0) = 1$$

Uso la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

es continua en 0, entonces con esto podemos calcular

$$\lim_{(x,y) \to (0,2)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,2)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y(y-4) + 4)}{x^2 + y(y-4) + 4} = \lim_{(x,y) \to (0,2)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + (y-2)^2)}{x^2 + (y-2)^2}$$

$= \lim\limits_{(x,y) \to (0,2)} g(x^2 + (y-2)^2)$ como $0^2 + (2-2)^2 = 0$ y

g es continua en 0, podemos ~~entrar~~ el límite entonces

$$\lim_{(x,y) \to (0,2)} g(x^2 + (y-2)^2) = g\left(\lim_{(x,y) \to (0,2)} x^2 + (y-2)^2\right)$$

y como los polinomios son funciones continuas, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,2)} x^2 + (y-2)^2 = 0$

Luego $\lim\limits_{(x,y) \to (0,2)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y) \to (0,2)} g(x^2 + (y-2)^2) = g(0) = 1 = f(0,2)$.

Y concluimos que f es continua en $(0,2)$, para los otros puntos sabemos que la composición de funciones continuas es continua y los polinomios también. Ley $sen(x^2+y(y-4)+4)$, $x^2+y(y-4)+4$ son funciones continuas y como $x^2+y(y-4)+4$ solo se anula en $(0,2)$ también tenemos que $\frac{sen(x^2+y(y-4)+4)}{x^2+y(y-4)+4}$ es continua en $(x,y)\neq(0,2)$

Con esto concluimos que f es continua $\square$

4.- Demuestre que el conjunto

$$A:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^4+y^4 \geq |z-1|\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^3$ ¿Es compacto?

Definimos la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ con $f(x,y,z)=x^4+y^4-|z-1|$ esta función es continua pues las funciones polinomiales son continuas y $|\cdot|$ es continua, como composición de funciones continuas es continua entonces $|z-1|$ es continua y como suma de continuas es continua entonces $f(x,y,z)=(x^4+y^4)-|z-1|$ es continua.

PROARTE

Entonces note que
$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4+y^4 \geq |z-1|\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4+y^4-|z-1| \geq 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) \geq 0\} \\ &= f^{-1}([0,\infty)) \end{aligned}$$

Como $[0,\infty)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y f es una función continua la pre imagen $f^{-1}([0,\infty)) = A$ será también un conjunto cerrado.

Si A fuese compacto tendría que ser acotado pero note que $(t,t,1) \in A$, pues $t^4+t^4 \geq 0 = |1-1|$, y entonces si existiera $M>0$ tal que $\|(x,y,z)\|_\infty < M$ $\forall (x,y,z) \in A$ entonces se tendría que $\|(M+1, M+1, 1)\|_\infty < M$ pero como $M>0 \Rightarrow \|(M+1, M+1, 1)\|_\infty = M+1 > M$, luego podemos concluir que A no es acotado y por lo tanto no es compacto $\square$