Apunte Matemáticas I y II

Sergio Muñoz

2020

Índice

Parte I
Matemáticas I Otoño 2020

Introducción

(o cuanta matemática deben saber para modelar una situación biológica básica)

La Ecuación logística es una *ecuación diferencial ordinaria* que modela el tamaño de una población sujeta a restricciones externas de espacio o alimento. Inicialmente, cuando la población es pequeña y las restricciones no afectan, el crecimiento es exponencial, pero a medida que el tamaño de la población aumenta y las restricciones se hacen notar, el ritmo de crecimiento se va frenando hasta que la población se estabiliza. Por supuesto, este modelo es muy simple y no toma en cuenta otros factores.

El modelo para esa situación establece que

$$\frac{d\,P}{d\,t} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde P es el tamaño de la población, el que varía con el tiempo t, r es la tasa maximal de crecimiento (una constante según el modelo), y K es la capacidad de carga o saturación (en cierto modo el valor máximo de la población). La *derivada* $\frac{d\,P}{d\,t}$ representa a la rapidez instantánea de crecimiento que, según el modelo, vale 0 cuando $P = 0$ (cuando no hay problación) y también cuando $P = K$ (cuando se alcanza la población máxima). Se trata de una ecuación diferencial ordinaria porque las soluciones son *funciones* de una variable. En este caso, toda solución es una función de la forma

$$P(t) = \frac{KP(0)e^{rt}}{K + P(0)(e^{rt} - 1)}$$

donde $P(0)$ representa la población en el instante 0 (inicio de la medición, por ejemplo) y cada valor de $P(0)$, con $0 < P(0) < K$ determina una solución distinta. Analizando las soluciones se puede *demostrar matemáticamente* que $P(t) < K$ para todo instante t pero que $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$, es decir, la población no sobrepasa el tamaño K sino que se acerca gradualmente (y cada vez más lento) hacia el valor K. También se puede probar que

$$\frac{d^2\,P}{d\,t^2} = r^2P\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{2P}{K}\right)$$

y así la gráfica de $P(t)$ tiene un *punto de inflexión* en $P = \frac{K}{2}$.

Su gráfico aproximado se muestra en la Figura 1.

Obtener y analizar esas soluciones requiere técnicas de Matemáticas I, Matemáticas II, Matemáticas III y Matemáticas IV.

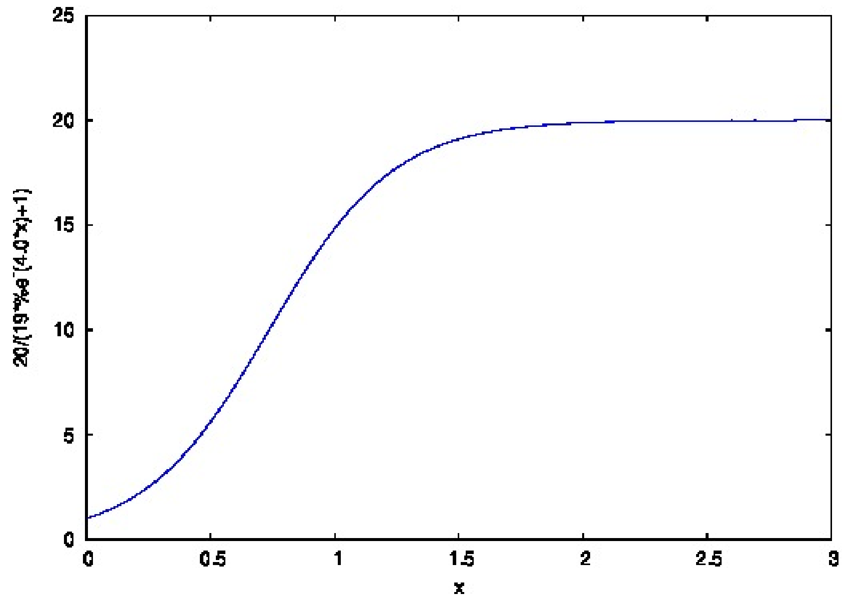


Figura 1: Una solución de la ecuación logística

Contenidos del curso Matemáticas I

- **Matrices y sistemas de ecuaciones lineales** Sistemas de ecuaciones lineales, representación matricial y resolución por operaciones elementales de la, representación de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales como conjuntos de elementos de $\mathbb{R}^n$.

- **Vectores en el plano** Suma, ponderación, norma, distancia, producto interno (producto punto clásico), perpendicularidad, ecuación paramétrica de la recta y su relación con otras formulaciones de la recta, paralelismo y perpendicularidad entre rectas.

- **Cónicas** Circunferencia, elipse, hipérbola, parábola.

- **Funciones reales de variable real** Números reales, operaciones, propiedades y orden. Ecuaciones e inecuaciones. Números naturales, enteros, racionales, y reales. Concepto de función matemática, funciones entre números reales, Dominio, regla de asignación, recorrido, operaciones entre funciones, composición, funciones inyectivas, funciones sobreyectivas, funciones biyectivas, funciones invertibles y funciones inversas. Gráfica de funciones.

- **Límite y continuidad de funciones reales de variable real** Definición de límite. Propiedades y cálculo de límites. Continuidad. Propiedades básicas de continuidad. Discontinuidades.

- **Derivadas de funciones reales de variable real** Definición de derivada y de función derivable. Interpretaciones geométrica y física de la derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena y razón de cambio.

- **Introducción primitivas e integrales** Primitivas y su caracterización básica. Integral de Newton. Áreas y Volúmenes de algunos sólidos de revolución y otras aplicaciones de la integral.
- **Funciones trigonométricas** Radianes y grados, circunferencia goniométrica. Periodicidad, paridad e imparidad. Funciones trigonométricas de suma y resta. Funciones trigonométricas inversas. Identidades trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas.
- **Polinomios en los reales** Denición de polinomios como funciones entre números reales, símbolo de sumatoria para expresar polinomios, raíces (o ceros) de polinomios, divisibilidad y factorización.

1. Sistemas de Ecuaciones lineales y Matrices

Ejemplo 1.1. *Balancear la reacción de combustión de Etano:*

$$C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O$$

Solución: Se pide encontrar valores de x, y, z y w tales que la cantidad de átomos en $x \cdot C_2H_6 + y \cdot O_2$ sea la misma que en $z \cdot CO_2 + w \cdot H_2O$. Por cada elemento se tiene:

- Para el Carbono debe cumplirse que $2x = z$
- Para Hidrógeno debe cumplirse que $6x = 2w$
- Para Oxígeno debe cumplirse que $2y = 2z + w$

Vemos que es fácil de resolver, si dejamos que y, z, y w se expresen respecto de x:

$$z = 2x \qquad w = \frac{6x}{2} = 3x \qquad y = \frac{2z + w}{2} = \frac{4x + 3x}{2} = \frac{7}{2}x$$

Al no haber más restricciones, el valor de x queda libre y cualquier valor que adopte x en $\mathbb{R}$ produce una solución, y como buscamos balancear la reacción, vistos los denominadores, podemos tomar $x = 2$, obteniendo entonces $z = 4$, $y = 7$, y $w = 6$, de modo que la reacción se balancea con

$$2C_2H_6 + 7O_2 \to 4CO_2 + 6H_2O$$

Pero cualquier múltiplo entero de 6 también da soluciones, sólo que es menos práctico: por ejemplo,

$$4C_2H_6 + 14O_2 \to 8CO_2 + 12H_2O$$

$\square$

Definición 1.1. *Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas $x_1, \cdots, x_n$ es una restricción a los valores de las incógnitas expresado en ecuaciones simultáneas de la forma:*

$$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \cdots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + \cdots + a_{2\,n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m\,1}x_1 + \cdots + a_{m\,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

Una solución de un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas es una lista de asignaciones $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ de números reales $c_1, \ldots, c_n$ que satisfacen cada ecuación del sistema.

Ejemplo 1.2. *(Continuación ejemplo 1.1) Planteado como sistema de ecuaciones, queda*

$$\begin{cases} 2x & & -z & & = & 0 \\ 6x & & & -2w & = & 0 \\ & 2y & -2z & -w & = & 0 \end{cases}$$

$\square$

En el caso de un sistema de $m = 2, n = 2$ cada ecuación es una recta en el plano $\mathbb{R}^2$. Hay 3 casos posibles para las gráficas de las ecuaciones

1. Las rectas se intersectan en un solo punto. Hay una única solución del sistema.
2. Las ecuaciones describen las misma recta. Hay infinitas soluciones del sistema.
3. Las dos rectas son paralelas. No hay solución del sistema.

En el caso de de un sistema de $m = 3$ y $n = 3$ cada ecuación es un plano en el espacio. En general un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas puede tener exactamente una solución, infinitas soluciones o no tener solución. Para resolver un sistema de ecuaciones se pueden hacer las siguientes operaciones, que no cambian el conjunto solución:

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante no nula.
3. Sumar a una ecuación un múltiplo no nulo de otra.

Ejemplo 1.3. *Encuentre las soluciones del sistema:*

$$\begin{cases} x + 2y + z & = -6 \\ 4x - 2y - z & = -4 \\ 2x - y + 3z & = 19 \end{cases}$$

<u>Solución:</u> Multiplicando la primera ecuación por -4, sumándole el resultado a la segunda, multiplicando la primera ecuación por -2 y sumándole el resultado a la tercera, se elimina x de estas dos ecuaciones y tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z & = -6 \\ -10y - 5z & = 20 \\ -5y + z & = 31 \end{cases}$$

En el sistema anterior, si la segunda ecuación se multiplica por $\dfrac{-1}{2}$ y se le suma a la tercera ecuación, eliminamos y de la tercera ecuación y se obtiene un sistema equivalente el anterior

$$\begin{cases} x + 2y + z & = -6 \\ -10y - 5z & = 20 \\ \dfrac{7}{2}z & = 21 \end{cases}$$

Al multiplicar la segunda ecuación por $\dfrac{-1}{10}$ y la tercera ecuación por $\dfrac{2}{7}$ llegamos al siguiente sistema equivalente al original.

$$\begin{cases} x + 2y + z & = -6 \\ y + \dfrac{1}{2}z & = -2 \\ z & = 6 \end{cases}$$

Observando este último sistema se ve que $z = 6$. Usando este valor en la segunda ecuación obtenemos que $y = -2 - \dfrac{1}{2}z = -2 - 3 = -5$. Para obtener el valor de x usamos la primera ecuación y que $y = -5, z = 6$. Luego $x = -2y - z - 6 = -2$.

Por consiguiente la solución del sistema original es única y es $\begin{cases} x & = -2 \\ y & = -5 \\ z & = 6 \end{cases}$ $\square$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales depende solamente de los números a_{ij} que aparecen en el sistema y no de las variables. Usaremos un arreglo de números que llamaremos una matriz asociada al sistema.

Definición 1.2 (Matrices)**.** *Se llama matriz de orden $m \times n$ con coeficientes reales a un arreglo de números reales de la forma:*

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.4. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es una matriz formada por los seis números* 4*,* -3*,* 8*,* 7*,* 0 *y* 1

Observación 1.1. *Dada una matriz como la mostrada en la definición1.2 hay m filas horizontales y n columnas verticales, por lo que se dice que la matriz es de la forma $m \times n$; tanto m como n cuentan filas y columnas, así que ambos son números naturales. Los números que aparecen se denotan, respecto de la matriz, por su posición en la intersección de una fila y de una columna, de modo que $a_{2\,1}$ es la forma de indicar al número que ocupa la intersección (o posición) en la segunda fila y primera columna. En general, se dice que el coeficiente (i, j) de la matriz anterior es $a_{i\,j}$ y es el que ocupa la posición en fila i y columna j, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.*

Una matriz se dice cuadrada *si tiene igual número de filas que de columnas.*

Denotamos por f_i a la i-ésima fila de la matriz, para $1 \leq i \leq m$, si la matriz posee m filas. Análogamente, c_j denota a la j-ésima columna de la matriz, con $1 \leq j \leq n$, si la matriz posee n columnas.

Si denotamos a una matriz como $A_{m \times n}$, nos referimos a que tiene nombre A, su forma es de $m \in \mathbb{N}$ filas y $n \in \mathbb{N}$ columnas, y por $A = \big(a_{i\,j}\big)_{m \times n}$ entenderemos que su coeficiente *genérico es* $a_{i\,j} \in \mathbb{R}$, *con* $1 \le i \le m$ *y* $1 \le j \le n$ *(note que no importa el nombre dado a* i *ni a* j*, mientras no haya confusión y sean números naturales), mientras que denotar a una matriz como* $B_{p\times q}$ *indica que su nombre es* B*, es de* $p \in \mathbb{N}$ *filas y* $q \in \mathbb{N}$ *columnas, y por* $B = \big(b_{i\,j}\big)_{p\times q}$ *entenderemos su coeficiente genérico es* $b_{i\,j} \in \mathbb{R}$ *con* $1 \le i \le p$ *y* $1 \le j \le q$*.*

Ejemplo 1.5. *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ *es de la forma* 2×3 *y cumple* $a_{1\,1} = 4$ *y que* $a_{2\,2} = 7$*.*

Definición 1.3 (Matriz ampliada)**.** *Se dice que*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} & b_1 \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n} & b_m \end{array}\right)$$

es la matriz ampliada *del sistema*

$$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \cdots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + \cdots + a_{2\,n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m\,1}x_1 + \cdots + a_{m\,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

Ejemplo 1.6. *La matriz ampliada del sistema* $\begin{cases} 2x + 4y - 5z & = 1 \\ x - y + z & = 0 \end{cases}$ *es* $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Definición 1.4 (Igualdad de matrices)**.** *Dos matrices* A *y* B *son iguales si tienen igual forma, y los coeficientes respectivos, para cada posición fila-columna, son a su vez iguales.*

Las operaciones que realizamos con ecuaciones de un sistema de ecuaciones se replican en las respectivas matrices ampliadas a fin de lograr que al modificar la matriz ampliada, el sistema de ecuaciones lineales que representa tenga las mismas soluciones que el sistema de ecuaciones representado por la matriz ampliada inicial.

En general, un sistema de ecuaciones lineales con pocas ecuaciones e incógnitas pudiera resolverse de forma más directa, pero se cometen errores al olvidar algunas restricciones, obteniendo a veces falsas soluciones en sistemas que no tienen soluciones; por otra parte, si un sistema es de muchas ecuaciones e incógnitas, hace falta un método ordenado, para lo cual la versión matricial es relevante.

Definición 1.5 (Operaciones elementales de fila)**.** *A cualquier matriz podemos aplicarle una de las siguientes operaciones elementales:*

1. *Reemplazar una fila por el resultado de sumarle un mútiplo de otra fila, columna a columna.*

Se denota $f_i + kf_j$, al reemplazar la fila f_i, situado en la matriz al lado de la fila f_i.

2. *Reemplazar una fila por su múltiplo o ponderado (cada uno de los coeficientes de la fila) por una constante no nula.*

   Se denota por kf_i, si k es la constante no nula, al lado de la fila a reemplazar f_i.

3. *Intercambiar dos filas de la matriz.*

   Se denota por $f_i \leftrightarrow f_j$ al lado de una de las dos filas, para indicar que la i-ésima fila se intercambia con la j-ésima fila.

Si la matriz B se obtiene de la matriz A por una o más operaciones elementales de fila, diremos que son matrices equivalentes por filas y lo denotamos $A \sim B$.

Note que las operaciones elementales se aplican a cualquier matriz, ampliada o no, ya que lo ampliado es una indicación adicional a la matriz.

Ejemplo 1.7. *Se cumplen:*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} f_2 + 3f_1 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} 2f_2 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} f_2 \leftrightarrow f_3 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proposición 1.1. *Si A y B son matrices y $A \sim B$, entonces:*

1. *A y B tienen la misma forma (igual cantidad de filas, e igual cantidad de columnas)*

2. *Si A y B son matrices ampliadas de respectivos sistemas de ecuaciones lineales, entonces esos sistemas tienen exactamente las mismas soluciones.*

Para decidir las soluciones de un sistema de ecuaciones

Definición 1.6 (Matriz escalonada y reducida)**.** *1. Diremos que una matriz A está en forma **escalonada por filas** si cumple:*

   a) *Para cada fila no nula (no sólo ceros en ella), el primer elemento no cero de izquierda a derecha se llama pivote (si además vale 1, algunos textos lo llaman 1-principal) y en su columna, todo elemento que está bajo el pivote es 0.*

b) *El pivote de cada fila no nula aparece a la izquierda de los pivotes de las filas inferiores.*

c) *Todas las filas nulas (sólo ceros en ellas), si las hay, aparecen en la parte inferior de la matriz.*

2. *Diremos que una matriz escalonada por filas está en forma* ***reducida por filas*** *si además cumple:*

a) *Todos los pivotes valen 1.*

b) *El pivote es el único elemento distinto de cero en su columna.*

Ejemplo 1.8. $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-3} & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *es escalonada y sus pivotes están destacados, pero la matriz* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *no es escalonada.* □

Ejemplo 1.9. $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *es escalonada y reducida y sus pivotes están destacados, pero la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *es escalonada pero no reducida, tanto porque el pivote de la tercera fila no es 1, como porque los pivotes de segunda y tercera filas no son los unicos elementos no nulos de su respectiva columna.* □

La estrategia es convertir la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, mediante operaciones elementales de filas que no alteran las soluciones, en una matriz escalonada y reducida, ya que esta forma da de inmediato la forma de sus soluciones, aunque saber cuantas soluciones tiene un sistema se logra simplemente con la forma escalonada.

Para ello, es útil saber que las soluciones del SEL no dependen de la secuencia de operaciones realizadas, ya que cada matriz equivale por filas a una única matriz escalonada reducida:

Proposición 1.2. *Si* $A \sim B$ *y* A *y* B *son matrices escalonadas y reducidas, entonces* $A = B$ *(es la misma matriz)*

Como la solución de un SEL se puede expresar desde su matriz ampliada escalonada reducida, la propiedad anterior indica la unicidad de la solución.

Ejemplo 1.10 (Caso de solución única)**.** *Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} x+2y-z &= 2 \\ x+y-2z &= -3 \\ x+y+z &= 6 \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

Resolveremos en paralelo directamente en el sistema de ecuaciones y en la matriz, para que se evidencie que ambas formas proveen la misma respuesta, paso a paso inclusive:

$$\begin{cases} x & +2y & -z & = & 2 \\ x & +y & -2z & = & -3 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{array}$$

Eliminando x abajo | Haciendo ceros en columna 1

$$\begin{cases} x & +2y & -z & = & 2 \\ & -y & -z & = & -5 \\ & -y & +2z & = & 4 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) (-1) \cdot f_2$$

Cambiando signo en segunda ecuación | Cambiando signo a fila 2

$$\begin{cases} x+2y-z & = & 2 \\ y+z & = & 5 \\ -y+2z & = & 4 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 - 2 \cdot f_2 \\ \\ f_3 + f_2 \end{array}$$

Eliminando y primera y tercera ecuaciones | Hacer ceros en segunda columna

$$\begin{cases} x & & -3z & = & -8 \\ & y & +z & = & 5 \\ & & 3z & = & 9 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (1/3) \cdot f_3 \end{array}$$

Dividiendo tercera ecuación por 3 | Ponderando tercera fila por 1/3

$$\begin{cases} x & & -3z & = & -8 \\ & y & +z & = & 5 \\ & & z & = & 3 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 + 3 \cdot f_3 \\ f_2 - f_3 \end{array}$$

Eliminando z primera y segunda ecuaciones | Haciendo ceros en tercera columna

$$\begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ □

Ejemplo 1.11. *El sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x & +y & +5z & = & 4 \\ & 2y & +3z & = & 5 \\ & & 2z & = & -4 \end{cases}$ *está casi listo para resolver, y se puede resolver si vamos reemplazando valores hacia arriba, pero matricialmente* *sigue siendo más limpio: la matriz ampliada asociada (que está escalonada) es*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

es que claramente da un valor para z, $z = -2$, gracias al cual, en la segunda ecuación, tenemos un valor para y, $y = \dfrac{11}{2}$, gracias a los cuales, en la primera ecuación, tenemos un valor para x, $x = \dfrac{17}{2}$.

Pero podemos hacerlo mejor reduciendo la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right)_{\frac{1}{2}f_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} f_1 - 5f_3 \\ f_2 - 3f_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\frac{1}{2}f_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} f_1 - f_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

y la última matriz corresponde al sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x &= \dfrac{17}{2} \\ y &= \dfrac{11}{2} \\ z &= -2 \end{cases}$ *que da exactamente la solución, única, del sistema de ecuaciones lineales inicial.*

Ejemplo 1.12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ *es la matriz ampliada del sistema* $\left\{\begin{array}{cccc} x & & +5z & = & 2 \\ & y & -z & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$, *y sus soluciones son infinitas de la forma* $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2 - 5\alpha \\ y & = & 2 + \alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right.$ *para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ (cada valor de α provee una solución diferente del sistema)* □

Ejemplo 1.13 (Caso de infinitas soluciones)**.** *Resolver*

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 4 \\ 2x + 7y + 2z = 20 \\ -x - 2y + 14z = 8 \end{cases}$$

Solución: Por matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 20 \\ -1 & -2 & 14 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ f_2 - 2\cdot f_1 \\ f_3 + f_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_1 - 3\cdot f_2 \\ \\ f_3 - f_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -34 & -32 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Volviendo a SEL, se obtiene $\begin{cases} x - 34z = -32 \\ y + 10z = 12 \end{cases}$ o mejor $\begin{cases} x = -32 + 34k \\ y = 12 - 10k \\ z = k \end{cases}$ para cada valor de k en $\mathbb{R}$.

Otra forma de representar las soluciones es mediante tríos de números reales $(x, y, z) = (-32 + 34k,\ 12 - 10k,\ k)$ para cada valor de k en los reales.

Note que cada valor de k en $\mathbb{R}$ aporta una solución diferente al sistema propuesto:

- para $k = 0$ se tiene la solución $(x, y, z) = (-32, 12, 0)$,
- para $k = 1$ se tiene la solución $(x, y, z) = (2, 2, 1)$,
- para $k = -1$ se tiene la solución $(x, y, z) = (-66, 22, -1)$, etc.

Es claro entonces que este sistema de ecuaciones posee tantas soluciones como números reales haya, razón por la cual decimos que el sistema propuesto tiene una infinidad de soluciones que dependen de un parámetro, k en este caso. □

Ejemplo 1.14 (Caso en que no hay soluciones)**.** *Resolver*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \\ 3x + 4y - z = 6 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - 3\cdot f_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -9 \end{array}\right) (-1)\cdot f_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_1 - 2\cdot f_2 \\ \\ f_3 + 2\cdot f_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

y aunque como matriz (sin considerar ampliación) se puede seguir reduciendo, volviendo a SEL se obtiene

$$\begin{cases} x - 3z &= -1 \\ y + 2z &= 3 \\ 0 &= -3 \end{cases}$$

Pero la tercera ecuación es contradictoria, por lo tanto, el sistema de ecuaciones no posee solución. En este caso decimos que el sistema es incompatible. □

Resumiendo:

Proposición 1.3. *Si $(A \mid B)$ es la matriz ampliada de un SEL, entonces:*

- *El sistema no tiene solución cuando hay un pivote en la parte ampliada B.*
- *El sistema tiene solución única cuando cada columna de la parte no ampliada, A, tiene pivote.*
- *El sistema tiene infinitas soluciones si hay una columna sin pivote en la parte no ampliada, A, y la parte ampliada B no tiene pivote.*

Ejemplo 1.15. *Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$, de modo que el sistema de ecuaciones lineales tengan única, ninguna o infintas soluciones:* $\begin{cases} x + y + kz &= 3 \\ x + ky + z &= 2 \\ kx + y + z &= 1 \end{cases}$

<u>Solución</u>: Basta escalonar la matriz ampliada del sistema, ya que se requiere analizar los pivotes y no explicitar las soluciones

$$\begin{aligned}
(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & k & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) f_2 + (-1)f_1 \quad &\sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3 \\ 0 & k-1 & 1-k & -1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) f_3 + (-k)f_1 \\
&\sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3 \\ 0 & k-1 & 1-k & -1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-3k \end{array}\right) f_3 + f_2 \\
&\sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3 \\ 0 & k-1 & 1-k & -1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -3k \end{array}\right) \\
&= \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3 \\ 0 & k-1 & 1-k & -1 \\ 0 & 0 & (-k-2)(k-1) & -3k \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Analicemos los casos posibles según las expresiones que involucran a k:

1. Si $k=1$, la última matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$, que no tiene solución, ya que hay un pivote en la parte ampliada.

2. Si $k=-2$, la última matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$, que tampoco tiene solución, ya que hay un pivote en la parte ampliada.

3. Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, el sistema tiene tres pivotes, el 1 de fila 1, el $k-1$ de fila 2, y el $(-k-2)(k-1)$ de la fila tres, que no son nulos en este caso, y como la parte no ampliada de la matriz tiene tres columnas y un pivote en cada una, el sistema tiene solución única.

Finalmente, la respuesta es

1. El sistema no tiene solución si $k=1, k=-2$.

2. El sistema tiene solución única si $k \neq 1, k \neq -2$,

3. El sistema no puede tener infinitas soluciones pues nunca ocurre que el rango de la matriz sea menor que la cantidad de filas, tento en lo ampliado como en lo no ampliado.

$\square$

Ejercicio 1.1. *Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$, de modo que los sistemas de ecuaciones lineales tengan única, ninguna o infintas soluciones:*

1. $\begin{cases} x-y+2z &= 8 \\ -x+y-z &= 4 \\ x+ky+z &= -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+kz &= 6 \\ 3x+6y+8z &= 5 \end{cases}$

1.1. Guía

1. Encontrar el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\begin{cases} x+y+3z &= 5 \\ 2x-y+4z &= 11 \\ -y+z &= 3. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x+2y+z &= 1 \\ 5x+3y+3z &= 2 \\ x+y-z &= 1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x+2y+z &= 1 \\ 5x+3y+3z &= 2 \\ 7x+4y+5z &= 3. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x+2y+z &= 1 \\ 5x+3y+3z &= 2 \\ 7x+4y+5z &= 3 \\ x+y-z &= 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x-2y+z+2u &= 0 \\ 2x+3y-z-5u &= 0 \\ 4x-y+z-u &= 0 \\ 5x-3y-z &= 0. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 3x-2y+5z+u &= 1 \\ x+y-3z+2u &= 2 \\ 6x+y-4z+3u &= 7. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x-y-z &= 4 \\ 3x+4y-2z &= 11 \\ 3x-2y+4z &= 11. \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x+y+2z &= -1 \\ 2x-y+2z &= -4 \\ 4x+y+4z &= -2. \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 3x+2y+z &= 5 \\ 2x+3y+z &= 1 \\ 2x+1y+3z &= 11. \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 0 \\ x_1+3x_2+6x_3+10x_4 &= 0 \\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4 &= 0. \end{cases}$

<u>Resp.</u>: *1(a)* $x = 8/5, y = -7/5, z = 8/5$ *1(b) Sin solución*
1(c) $x = -3z+1, y = 4z-1, z \in \mathbb{R}$ *1(d)* $x = -3z+1, y = 4z-1, z \in \mathbb{R}$
1(e) $x = (13u)/21, y = (8u)/7, z = -u/3,\ u \in \mathbb{R}$ *1(f)* $y = 14x-13, z = 5x-5, x \in \mathbb{R}$
1(g) $x = 3, y = 1, z = 1$ *1(h)* $x = 1, y = 2, z = -2$
1(i) $x = 2, y = -2, z = 3$ *1(j) Sin solución*

2. Resuelva los siguientes sistemas y verifique sus soluciones reemplazando en el sistema y logrando que las igualdades se cumplan:

$a)$ $\begin{cases} x+y+z &= 8 \\ x-2y+z &= 4 \\ x+y-3z &= -4 \end{cases}$ $c)$ $\begin{cases} x-5y+z &= 2 \\ 10x+y+3z &= 4 \\ 4x+2y-5z &= 9 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x+y-5z &= -1 \\ 5x-5y+21z &= 5 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} x+7y-4z &= 1 \\ 2x+3y+z &= -3 \\ -x-18y+13z &= 2 \end{cases}$

$e)\ \begin{cases} x+2y+z &= 2 \\ -y+3z &= 8 \\ 2z &= 10 \end{cases}$

$f)\ \begin{cases} x-2y+2z &= -10 \\ y+4z &= -10 \\ -3z &= 9 \end{cases}$

$g)\ \begin{cases} x-y-8z &= 0 \\ y+4z &= 8 \\ 3y+14z &= 22 \end{cases}$

$h)\ \begin{cases} x+3y-8z &= 20 \\ y-3z &= 11 \\ 2y+7z &= -4 \end{cases}$

$i)\ \begin{cases} x+4y-2z &= 9 \\ x+5y+2z &= -2 \\ x+4y-28z &= 22 \end{cases}$

$j)\ \begin{cases} x-3y-z &= 0 \\ x-2y+z &= 8 \\ 2x-6y+z &= 6 \end{cases}$

$k)\ \begin{cases} x+y+3z &= 5 \\ 2x-y+4z &= 11 \\ -y+z &= 3 \end{cases}$

$l)\ \begin{cases} 3x+2y+z &= 1 \\ 5x+3y+3z &= 2 \\ x+y-z &= 1 \end{cases}$

$m)\ \begin{cases} 3x+2y+z &= 1 \\ 5x+3y+3z &= 2 \\ 7x+4y+5z &= 3 \end{cases}$

$n)\ \begin{cases} 3x+2y+z &= 1 \\ 5x+3y+3z &= 2 \\ 7x+4y+5z &= 3 \\ x+y-z &= 0 \end{cases}$

3. Escalone y reduzca las matrices siguientes. Si cada una fuera la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, ¿qué solución tendría el sistema?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Encuentre el o los valores de $k \in \mathbb{R}$, de modo que cada sistemas de ecuaciones lineales tenga única, ninguna o infintas soluciones:

(a) $\begin{cases} x+2y-3z & =4 \\ 3x-y+5z & =2 \\ 4x+y+(k^2-14)z & =k+2. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-y & =3 \\ 2x+2y & =k. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x+2y+z & =5 \\ 2x+3y+z & =1 \\ 2x+ky+3z & =11. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y+2z & =-1 \\ 2kx-y+2z & =-4 \\ 4x+(k+1)y+4z & =-2. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x-y+z & =5 \\ -x+ky-z & =8 \\ 3x+y-z & =-3 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x-2y+z & =4 \\ 3x+y+kz & =-1 \end{cases}$

5. Determine para cuales valores de $k \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Para los valores de k en que existe solución determínela en función de k.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & & +(k^2-1)z & = & k \\ x & +(k+2)y & +(1-k^2)z & = & 2+k \\ 2x & & +(k^2-1)z & = & 2k \end{array} \right\}$$

6. Considere el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales, donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro desconocido pero no es una incógnita del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & & & +2\,z & = & 1 \\ 2\,x & +y & & +7\,z & = & 1 \\ -x & +y & +\big(k^2+k+1\big)z & & = & k-1 \end{array} \right.$$

Determine, utilizando en cada caso escalonamiento y reducción de la matriz ampliada asociada:

a) Las soluciones del sistema para $k=2$

b) Las soluciones del sistema para $k=0$

c) Los valores de k para que el sistema tenga:

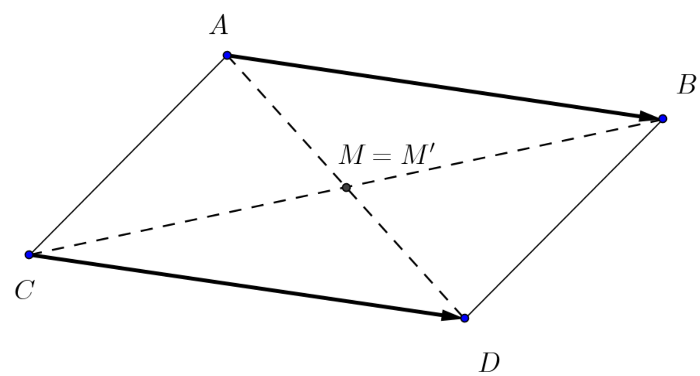
1) Infinitas soluciones
2) Ninguna solución
3) Solución única

2. Vectores en el plano

Los vectores son objetos matemáticos que poseen un valor numérico (su magnitud) y una dirección, como los segmentos rectilíneos, pero además poseen un sentido que indica, en el segmento, cual extremo es inicial y cual extremo es final, es decir, se distingue punto inicial y punto final. Por ello se acostumbra a representarlos por flechas, siendo muy útiles para representar fuerzas en Física.

Sin embargo, esa descripción es incompleta, ya que dos vectores que poseen la misma magnitud, son paralelos, y tienen el mismo sentido pero tienen puntos iniciales (y por tanto finales) diferentes, serán "el mismo vector". Esto se indica habitualmente como que la "flecha" se puede desplazar sin rotarla y sigue siendo el mismo vector.

Definición 2.1. *Diremos que un vector es lo que hay de común a segmentos orientados equivalentes, es decir, segmentos en que se distingue un extremo como punto inicial y el otro como punto final, y donde la equivalencia entre el segmento orientado de A a B y el segmento orientado de C a D viene dada porque el punto medio M entre A y D coincide con el punto medio M' entre B y C, como se muestra en la figura, en que los segmentos orientado son equivalentes y corresponden al mismo vector (note que si los puntos no son colineales, los puntos $ABDC$ forman un paralelógramo):*



Observación 2.1. 1. *En general representaremos los puntos por letras mayúsculas, como P y Q, por ejemplo, mientras que para los vectores usaremos letras minúsculas con flecha, como $\vec{v}$ y $\vec{w}$.*

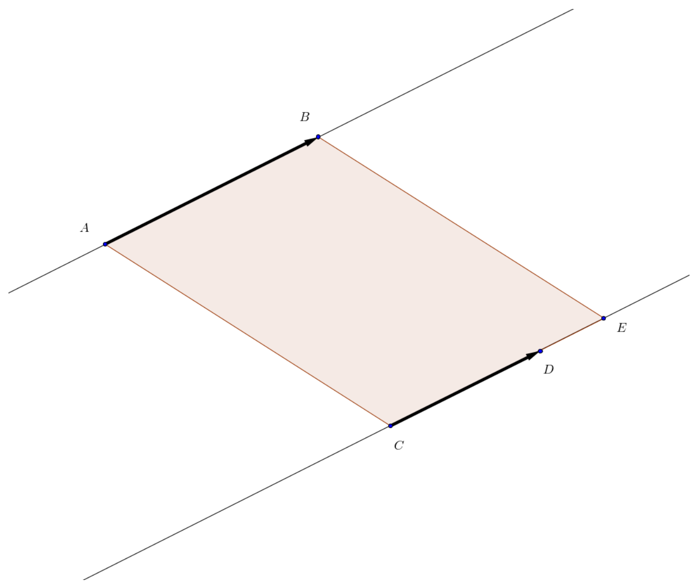
2. *Si A y B son puntos del plano, el segmento orientado de A hasta B determina un único vector denotado $\overrightarrow{AB}$.*

3. *Como caso especial, consideramos el vector nulo o vector cero* $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$*, que será necesario luego.*

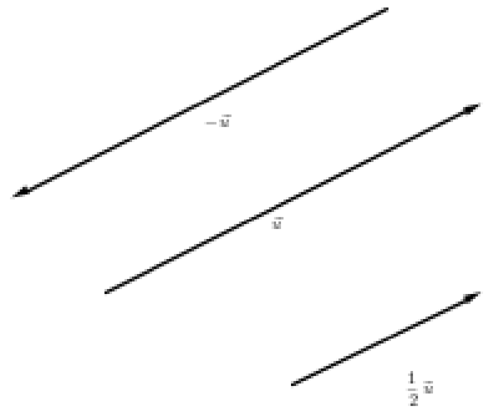
4. *Si ABDC son vértices consecutivos de un paralelógramo, entonces* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *(dibuje y comprenda)*

5. *Diremos que dos vectores no nulos (distintos de* $\vec{0}$*) son paralelos cuando cualquier segmento orientado de uno de ellos es paralelo a cualquier segmento orientado del otro vector, esto es,* $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ *si las rectas* $\overleftrightarrow{AB}$ *y* $\overleftrightarrow{CD}$ *son paralelas.*

6. *En el caso* $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$*, podemos copiar el segmento de A hasta B sobre la recta* $\overleftrightarrow{CD}$ *de modo que se obtenga un punto E sobre* $\overleftrightarrow{CD}$ *con* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$*. Observa:*



7. *Debido a lo anterior, en el caso* $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ *tenemos que la magnitud de uno de ellos es proporcional a la magnitud del otro. Por ello consideramos que un vector* $\vec{v}$ *se puede "ponderar" por un valor numérico k llamado "escalar" (como contrapuesto a "vector") produciendo un vector paralelo* $k\vec{v}$*; si* $k > 0$ *se tiene que* $k\vec{v}$ *preserva el sentido del vector, si* $k = 0$ *se obtiene* $\vec{0}$*, pero si* $k < 0$ *el sentido de* $k\vec{v}$ *es opuesto al sentido de* $\vec{v}$*. Observa la figura*



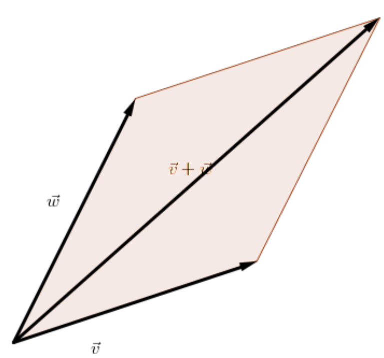
8. *Entonces para vectores no nulos se cumple* $\vec{v} \parallel \vec{w}$ *exactamente cuando existe* $k \in \mathbb{R}$ *con* $k \neq 0$ *y* $\vec{v} = k\vec{w}$.

9. *La norma o magnitud de* $\vec{v}$ *se denota* $\left\|\vec{v}\right\|$

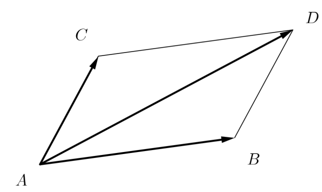
10. *Por lo dicho antes, se obtiene* $\left\|k\vec{v}\right\| = |k| \left\|\vec{v}\right\|$ *(donde* $|k|$ *es el valor absoluto de* k*)*

11. *La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une y, por tanto, es la norma del vector que ellos determinan:* $d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

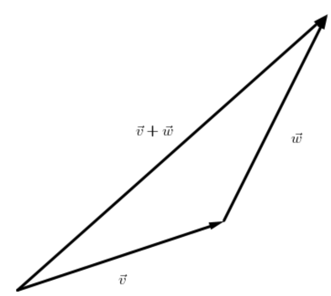
12. *La suma de vectores se obtiene de la Ley del Paralelógramo (habitual al considerar fuerzas concurrentes en un punto) como muestra la figura:*



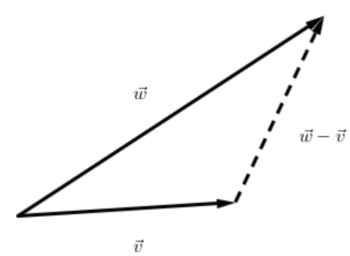
Se cumple $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ *ssi* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



13. *La suma también se puede considerar concatenando los vectores (habitual al considerar vectores como desplazamiento)*



14. *La resta se obtiene aprovechando la idea anterior:*



2.1. Vectores en el plano coordenado

En el Plano Coordenado $\mathbb{R}^2$, formado por coordenadas de los puntos del plano de la forma (x, y), los vectores se determinan indicando un punto final, asumiendo que el punto inicial sea el origen del sistema coordenado, $\mathcal{O} = (0, 0)$, de modo que $P = (a, b)$ determina al vector denotado $\overrightarrow{\mathcal{O}P} = [a, b]$, el que se llama, a su vez, "vector posición del punto P".

Lema 2.1. *El punto medio entre los puntos* (a, b) *y* (c, d) *es* $\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b+d}{2}\right)$

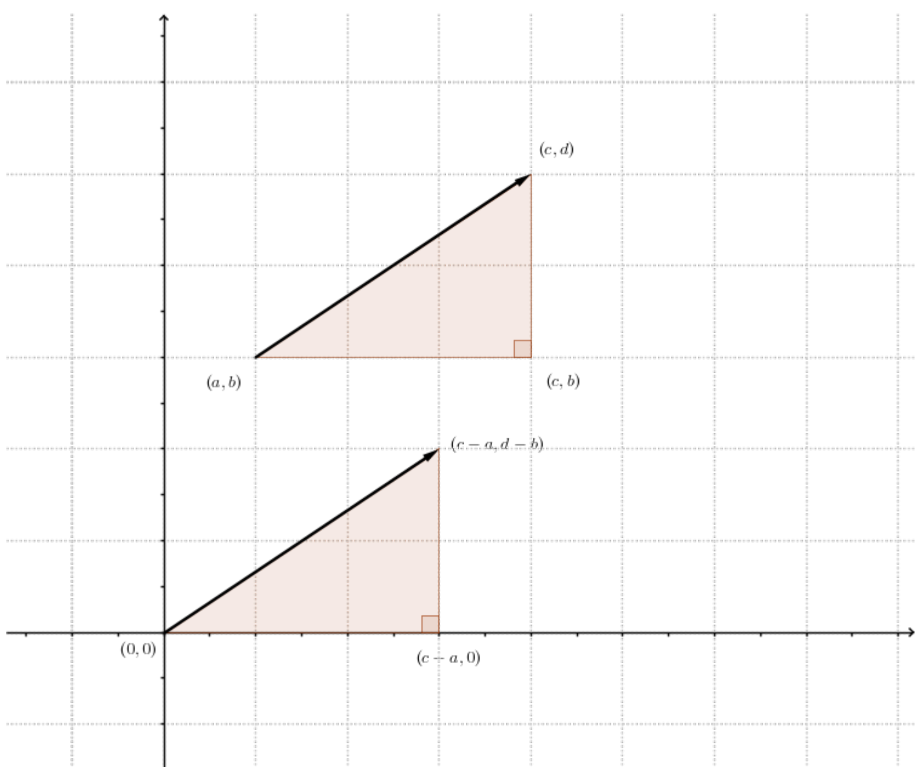
Proposición 2.1. *Si* $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$, $R = (\alpha, \beta)$ *y* $S = (\gamma, \delta)$ *entonces*

1. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ *ssi* $c - a = \gamma - \alpha$ *y* $d - b = \delta - \beta$ *ssi* $(c - d, d - b) = (\gamma - \alpha,\ \delta - \beta)$
2. $\overrightarrow{PQ} = [c - a, d - b]$.

Demostración. 1. Usando una cadena de equivalencias entre afirmaciones:

- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$
- ssi el punto medio entre P y S coincide con el punto medio entre Q y R
- ssi $\left(\dfrac{a+\gamma}{2}, \dfrac{b+\delta}{2}\right) = \left(\dfrac{c+\alpha}{2}, \dfrac{d+\beta}{2}\right)$
- ssi $\dfrac{a+\gamma}{2} = \dfrac{c+\alpha}{2}$ y $\dfrac{b+\delta}{2} = \dfrac{d+\beta}{2}$
- ssi $a - c = \alpha - \gamma$ y $b - d = \beta - \delta$
- ssi $(c - d, d - b) = (\gamma - \alpha,\ \delta - \beta)$

2. Basta usar el ítem anterior a $\overrightarrow{PQ}$ y a $\overrightarrow{\mathcal{O}T}$, donde $T = (c - a, d - b)$, que cumplen $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\mathcal{O}, T}$ por semejanza de triángulos, como muestra la figura:



$\square$

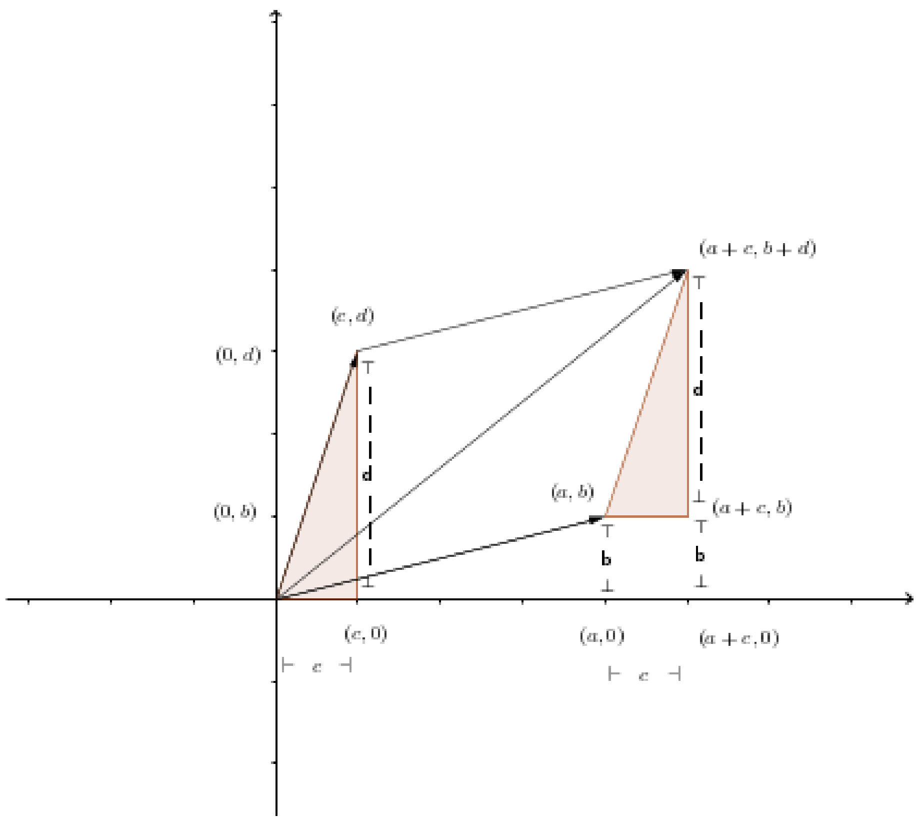
Observación 2.2. *Tanto el punto* (a, b) *como el vector* $[a, b]$ *los consideraremos en* $\mathbb{R}^3$*, al decir* $(a, b) \in \mathbb{R}^3$ *y* $[a, b] \in \mathbb{R}^3$*, para simplificar.*

Las operaciones con vectores resultan simples coordenada a coordenada:

Proposición 2.2. *Para todos* $k \in \mathbb{R}$*,* $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ *y* $[c, d] \in \mathbb{R}^2$ *se cumple*

1. $k[a, b] = [ka, kb]$
2. $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
3. $[a, b] - [c, d] = [a - c, b - d]$

Para la suma, observa el dibujo:



Proposición 2.3. *La norma o magnitud del vector* $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ *es* $\big\|[a, b]\big\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Demostración. Como la norma del vector es igual a la longitud de cualquiera de los segmentos orientados que determinan al vector, y como el vector $[a, b]$ corresponde al segmento orientado que va del punto $(0, 0)$ al punto (a, b), entonces la noción de distancia entre puntos dada por el Teorema de Pitágoras indica que esa longitud, y por tanto la norma del vector $[a, b]$, es $\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\square$

La perpendicularidad es más complicada, pero hay una forma de resolverla gracias, nuevamente, al Teorema de Pitágoras:

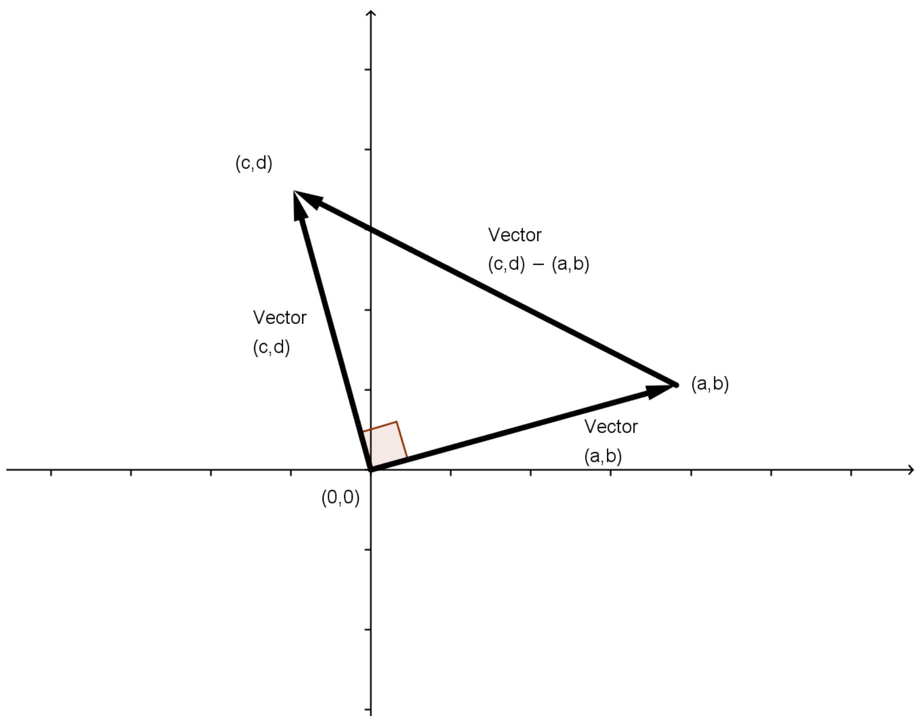
Proposición 2.4. *Los vectores no nulos y no distintos $[a,b]$ y $[c,d]$ son perpendiculares ssi $ac+bd=0$.*

Demostración. Como los vectores $[a,b]$ y $[c,d]$ son determinados por los segmentos orientados desde el punto $(0,0)$ hasta el punto (a,c), y desde $(0,0)$ hasta (c,d) respectivamente, entonces:

$[a,b]$ es perpendicular a $[c,d]$

ssi sus segmentos son perpendiculares

ssi $(0,0)$, (a,b) y (c,d) forman los vértices de un triángulo rectángulo en $(0,0)$



ssi $\left\|[a,b]\right\|^2+\left\|[c,d]\right\|^2=\left\|[a,b]-[c,d]\right\|^2=\left\|[a-c,b-d]\right\|^2$

ssi $(a^2+b^2)+(c^2+d^2)=(a-c)^2+(b-d)^2=(a^2-2ab+b^2)+(c^2-2cd+d^2)$

ssi $0=-2(ac+bd)$

ssi $ac+bd=0$

□

Ejemplo 2.1. *Los vectores $[3,2]$ y $[-2,3]$ son perpendiculares, ya que $3\cdot(-2)+2\cdot3=-6+6=0$.* □

2.2. Guía 2

1. Determine las coordenadas del vector correspondiente a los puntos inicial y final indicados, y calcule su norma:

   a) De $(1, 2)$ a $(4, 7)$
   Resp $(3, 5)$ norma $\sqrt{34}$

   b) De $(3, -2)$ a $(1, 1)$

   c) De $(1, 1)$ a $(3, -2)$

   d) De $(0, 0)$ a $(-5, 3)$

   e) De $(9, 1)$ a $(0, 0)$
   Resp $(-9, -1)$ norma $\sqrt{82}$

   f) De $(2, 7)$ a (a, b)

2. Escriba los siguientes vectores en la forma $\alpha[1, y]$, simplificando si se puede, o indique si ello no es posible:

   a) $[3, 1]$

   b) $[-15, 60]$
   Resp $-15\,[1, -4]$

   c) $[0, 4]$

   d) $\left[\frac{3}{4}, \frac{-1}{5}\right]$

   e) $\left[\frac{1}{2}, 10\right]$

   f) $[\sqrt{3}, 6]$

   g) $[a - b, a^2 - 2ab + b^2]$

   h) $[a^3 - b^3, a - b]$
   Resp $(a^3 - b^3) \cdot \left[1, \dfrac{1}{a^2 + ab + b^2}\right]$

   i) $[a^2 - 2a, a^3 - 4a]$

3. Determine, en cada caso, si los pares de vectores dados son paralelos o no:

   a) $[1, 5]$ y $[4, 20]$
   Resp Sí

   b) $[-3, 2]$ y $[6, 4]$

   c) $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ y $[-3, -18]$

   d) $[p, p]$ y $[x - 3, x - 3]$

   e) $[2, 8]$ y $\left[\frac{3}{2}, 6\right]$ **Resp** Sí

   f) $\left[\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right]$ y $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{3}\right]$

   g) $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$ y $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4}{3}\right]$

   h) $[a-b, a+b]$ y $\left[\dfrac{ab + b + a}{a + b}, \dfrac{a + b + ab}{a - b}\right]$

4. Determine la suma y la resta entre los siguientes vectores, simplificando si es posible y calculando la norma de la resta:

a) $[2, 3]$ y $[4, -2]$

b) $2[3, -1]$ y $-3[1, 2]$

c) $-[2, 1]$ y $[2, -1]$

d) $\left[\frac{2}{3}, \frac{-3}{2}\right]$ y $\left[\frac{4}{5}, \frac{1}{3}\right]$

e) $\sqrt{2}[2, 1]$ y $\left[\sqrt{12}, \sqrt{6}\right]$

f) $\left[\frac{1}{x+2}, \frac{a}{x-a}\right]$ y $\left[\frac{1}{x+2}, \frac{b}{x-b}\right]$

g) $\left[\frac{a}{x-a}, \frac{xy}{25x^2-y^2}\right]$ y $\left[\frac{a^2}{x^2-a^2}, \frac{2x^2y}{10x^2y+2xy^2}\right]$

5. Determine, en cada caso, si los pares de vectores son perpendiculares entre sí o no:

a) $[2, -1]$ y $[3, 1]$

b) $[3, -5]$ y $[10, 6]$

c) $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right]$ y $\left[\frac{9}{5}, -6\right]$

d) $\left[\frac{12}{7}, -\frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{7}{12}, \frac{4}{3}\right]$

e) $\left[\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$ y $\left[-5, \sqrt{10}\right]$

f) $\left[\frac{1}{1+\sqrt{2}}, 2\right]$ y $\left[\frac{1}{\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2}\right]$

g) $[a, b]$ y $\left[-ab, a^2\right]$

h) $[c, d]$ y $[-c, d]$

6. Determine en cada caso si los tres puntos dados forman o no los vértices de un triángulo rectángulo:

a) $(2, -4)$, $(6, -2)$ y $(3, -6)$

b) $(3, -4)$, $(5, -3)$ y $(7, -5)$

c) $(102, -15)$, $(13, -62)$ y $(12, 17)$

d) $(-9.5, 11.8)$, $(80.5, 3.8)$, y $(-9.1, 16.3)$

e) $(a + b, a - b)$, $(0, 0)$ y $(b - a, a + b)$, para $a, b \in \mathbb{R}$

f) $(0, 0)$, $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$ y $\left(\frac{-b}{1+(ab)^2}, \frac{a}{1+(ab)^2}\right)$

7. Determine en cada caso si los cuatro puntos dados forman un paralelógramo, un rectángulo, un cuadrado, o no es ninguno de esos casos:

a) $(1, -3)$, $(2, -2)$, $(4, -1)$ y $(5, 1)$

b) $(-1, 0)$, $(-4, 5)$, $(7, 10)$, $(5, 12)$

c) $(2.3,\ 19.1)$, $(22.9,\ 12.9)$, $(23.1,\ 10.5)$ y $(2.5,\ 16.7)$

d) $(-5.5, -6.6)$, $(-10.5, 2.4)$, $(-3.5, 0.4)$ y $(-12.5, -4.6)$

e) $(26, 24)$, $\left(\frac{13}{2}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{17}{4}, \frac{7}{5}\right)$ y $\left(\frac{61}{4}, \frac{73}{5}\right)$

f) $(57, -21)$, $(35, -29)$, $(47, -44)$, $(45, -21)$

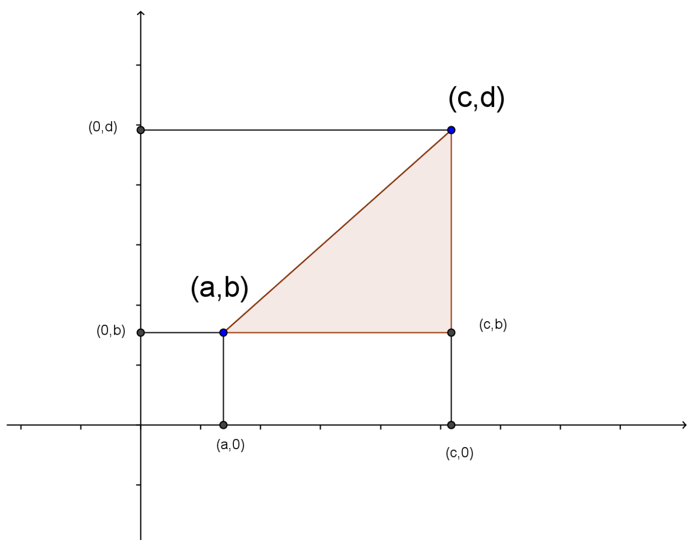
2.3. Vectores, ángulos y pendientes.

Cuando tenemos vectores no verticales, es decir, de la forma $\vec{v} = (a, b)$ con $a \neq 0$, el vector $\vec{v}$ posee una pendiente que es un valor numérico que indica la inclinación del vector respecto del eje horizontal.

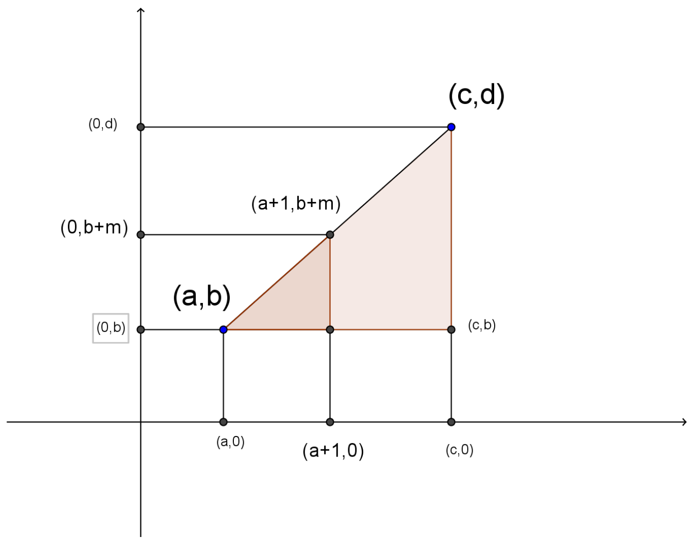
Definición 2.2 (Pendiente de un segmento)**.** *La pendiente determinada por el segmento no vertical entre los puntos diferentes* (a, b) *y* (c, d) *es el número* $m = \dfrac{d-b}{c-a}$

Observación 2.3. *1. Es claro que* $\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{b-d}{a-c}$

2. La pendiente se relaciona con el sistema coordenado al formar el triángulo rectángulo de vértices (a, b), (c, b) *y* (c, d), *rectángulo en* (c, b)*:*



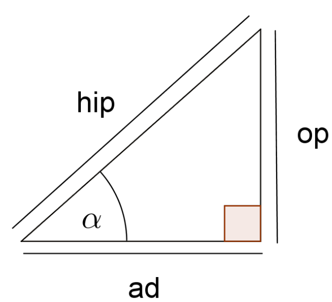
3. La pendiente da una medida común de comparación entre inclinaciones de segmentos ya que, por semejanza de triángulos, que las pendientes de dos segmentos valgan m *significa que, independiente de la longitud del segmento, su inclinación es la misma que la de un segmento cuyos extremos tengan primeras coordenadas de la forma* a *y* $a+1$, *entonces sus segundas coordenadas tendrán la forma* b *y* $b+m$ *respectivamente:*



4. Pero también la inclinación se relaciona con el ángulo que se forma entre el eje horizontal y el segmento, en los dibujos previos sería el ángulo en (a, b). Para ello, y por razones necesarias para el curso de Física, entre otras razones, definiremos las razones trigonométricas tangente, seno y coseno para un triángulo rectángulo, lo que retomaremos más adelante en el curso.

Definición 2.3 (Razones trigonométricas)**.** *1. En un triángulo rectángulo con un ángulo α y medidas hip, op y ad como en la figura, las razones trigonométricas básicas del ángulo α son:*

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{op}{hip} \qquad \cos(\alpha) = \frac{ad}{hip} \qquad \tan(\alpha) = \frac{op}{ad}$$

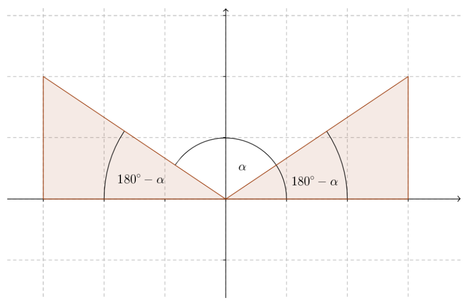


2. *Definimos*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(0^\circ) = 0 & \cos(0^\circ) = 1 & \tan(0^\circ) = 0 \\ \operatorname{sen}(90^\circ) = 1 & \cos(90^\circ) = 0 & \tan(90^\circ) \textit{ no existe} \\ \operatorname{sen}(180^\circ) = 0 & \cos(180^\circ) = -1 & \tan(180^\circ) = 0 \end{array}$$

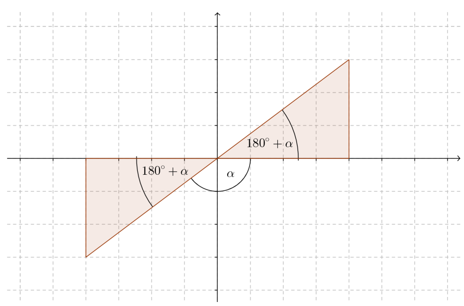
3. *Para ángulos α con $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ el ángulo $\beta = 180^\circ - \alpha$ cumple $0^\circ < \beta < 90^\circ$ y definimos*

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta) \qquad \cos(\alpha) = -\cos(\beta) \qquad \tan(\alpha) = -\tan(\beta)$$



4. *Para ángulos negativos de la forma $-\alpha$ para $0 < \alpha < 180^\circ$, definimos:*

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \qquad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$



Proposición 2.5. *Las razones trigonométricas cumplen, para un ángulo α:*

1. $\tan(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

2. *Por Teorema de Pitágoras,* $\big(\operatorname{sen}(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1$

3. *Se conocen las razones trigonométricas de algunos ángulos "notables":*

α	$\operatorname{sen}(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Proposición 2.6. 1. *La pendiente m de un segmento no vertical cumple $m = \tan(\alpha)$ para $-90° < \alpha < 90°$ siendo α la medida del ángulo que forma el segmento con el eje horizontal.*

2. *La pendiente m de un vector o segmento orientado no vertical cumple $m = \tan(\alpha)$ para $-180° \leq \alpha < 180°$ y $\alpha \neq 90°$ siendo α la medida del ángulo que forma el vector, considerando su sentido, con el eje horizontal.*

Ahora podemos expresar un vector según su norma (longitud, magnitud) y el ángulo que forma en el eje horizontal, tomando en cuenta su sentido:

Proposición 2.7. *Todo vector no nulo y no vertical $\vec{v}$ que, considerando su sentido, forma un ángulo de α grados respecto del eje horizontal, cumple $\vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \left[\cos(\alpha),\ \text{sen}(\alpha)\right]$*

Note que un vector de la forma $(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ es unitario.

Proposición 2.8. *Dado $\vec{v} = \left[\,\|\vec{v}\|\cos(\alpha),\ \|\vec{v}\|\,\text{sen}(\alpha)\right]$ se tiene:*

1. *La proyección de $\vec{v}$ sobre el eje horizontal es $\|\vec{v}\| \cdot \left[\cos(\alpha),\, 0\right]$*

2. *La proyección de $\vec{v}$ sobre el eje vertical es $\|\vec{v}\| \cdot \left[0,\, \text{sen}(\alpha)\right]$*

3. $\vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \left[\cos(\alpha),\, 0\right] + \|\vec{v}\| \cdot \left[0,\, \text{sen}(\alpha)\right]$

2.4. Rectas

Definición 2.4. *Una recta en el plano es un conjunto de puntos tales que la pendiente entre cualquier par de puntos del conjunto es igual a la pendiente entre cualquier otro par de puntos del conjunto.*

Proposición 2.9. *La recta que contiene a los puntos (a, b) y (c, d) con $a \neq c$ (recta no vertical) es el conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{y-b}{x-a} = \dfrac{d-b}{c-a}\right\}$ es decir, $\dfrac{y-b}{x-a} = \dfrac{d-b}{c-a}$ es una ecuación de la recta.*

Note que la pendiente constante de la recta anterior es $\dfrac{d-b}{c-a}$, y que si lo denotamos por m, entonces las siguientes son ecuaciones (algebraicamente) equivalentes a la anterior:

$$y = b + m(x - a)$$
$$y = mx + n \text{ con } n = b - ma$$

Proposición 2.10. *Toda recta vertical es de la forma $x = a$ para algún $a \in \mathbb{R}$.*

Proposición 2.11. *Dos rectas no verticales son paralelas ssi tienen igual pendiente.*

2.5. Guía 3

Trigonometría básica

1. Determine los valores pedidos:

   a) $\operatorname{sen}(-45)$

   b) $\tan(-60)$

   c) $\operatorname{sen}(120)$

   d) $\operatorname{sen}(-135)$

   e) $\operatorname{sen}(30) - 2\tan(45)$

   f) $\left(\operatorname{sen}(45))^2 - \cos(-60)\right)$

2. Determine los valores de seno y tangente si se sabe

   a) $\cos(p) = \dfrac{1}{3}$ y $-90 < p < 0$

   b) $\cos(p) = -\dfrac{4}{5}$ y $90 < p < 180$

   c) $\cos(p) = -\dfrac{2}{3}$ y $-180 < p < 0$

   d) $\tan(p)$ si $\operatorname{sen}(p) = 0,3$ y $cos(p) < 0$

   e) $\operatorname{sen}(p)$ si $\tan(p) = -12$ y $\cos(p) > 0$

   f) $\operatorname{sen}(p) \cdot \cos(p)$ si $\tan(p) = 0$

   g) $7\operatorname{sen}(p) - 5\cos(p)$ si $\tan(p)$ no existe

   Asuma que $0^o < \alpha < 90^o$ y que todo ocurre en triángulos rectángulos:

   a) Si $\cos(\alpha) = \dfrac{2}{3}$, calcule:

      1) $\operatorname{sen}(\alpha)$
      2) $\tan(\alpha)$
      3) $\operatorname{sen}(90^o - \alpha)$
      4) $\cos(90^o - \alpha)$
      5) $\tan(90^o - \alpha)$

   b) Si $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{5}{6}$, calcule:

      1) $\cos(\alpha)$
      2) $\tan(\alpha)$
      3) $\operatorname{sen}(90^o - \alpha)$
      4) $\cos(90^o - \alpha)$
      5) $\tan(90^o - \alpha)$

c) Si $\tan(\alpha) = \dfrac{7}{2}$, calcule:

1) $\operatorname{sen}(\alpha)$
2) $\cos(\alpha)$
3) $\operatorname{sen}(90^o - \alpha)$
4) $\cos(90^o - \alpha)$
5) $\tan(90^o - \alpha)$

d) Calcule $\tan(\alpha)$ si se sabe que $\operatorname{sen}(90^o - \alpha) = p$.

e) Calcule $\cos(\alpha)$ si se sabe que $\tan(90^o - \alpha) = p$.

f) ¿Puede ocurrir que $(\cos(\alpha))^2 + 1 = (\operatorname{sen}(\alpha))^2$?

g) ¿Cuánto valdría $\tan(\alpha)$ si se cumpliera $\cos(\alpha) = 5\operatorname{sen}(\alpha)$?

h) ¿Cuánto valdría $\cos(\alpha)$ si se cumpliera $\tan(\alpha) = 3 + \operatorname{sen}(\alpha)$?

Rectas

1. Determinar la pendiente de la recta que pasa por $(3, -2)$ y $(4, 7)$.
   Resp.: *9*

2. $(*)$ Pruebe, usando pendientes, que los cuatro puntos $(3, 3)$, $(2, 1)$, $(4, 4)$ y $(3, 2)$, son los vértices de un paralelógramo que no es rectángulo.

3. Una recta de pendiente 4 pasa por el punto $(3, 10)$. La primera coordenada de otro punto de la recta es 9. Determine la segunda coordenada de este punto.
   Resp.: 34

4. Una recta de pendiente -5 pasa por el punto $(1, 6)$ y por los puntos A y B. Si la segunda coordenada de A es -4 y la primera coordeanda de B es -2, determine la primera coordenada de A y la segunda coordenada de B.
   Resp.: *Primera coordenada de A:* 3. *Segunda cordenada de B:* 21

5. Tres de los vértices de un paralelógramo son $(3, 8)$, $(5, 7)$ y $(4, 7)$. Si la primera coordenada del cuarto punto es 6, determine su segunda coordenada.
   Resp.: *6*

6. $(*)$ Muestre que $(1, -2)$, $(-4, -12)$ y $(5, 6)$ son colineales usando pendientes.

7. $(*)$ Pruebe que la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(2, 4)$ es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 5)$ y $(3, 2)$.

8. Determine si los puntos $(5, 1)$, $(8, 6)$, $(7, 8)$ y $(4, 3)$ son los vértices de un paralelógramo, y determine si es además un rectángulo o no.
   Resp.: *Paralelógramo no rectángulo*

9. Determine si el punto $(23, -7)$ está al mismo lado que el origen, o al otro lado que él, respecto del segmento dado por los puntos $(-6\sqrt{3}, 7)$ y $(18, -4)$.
   Resp.: *Al otro lado.*

10. $(*)$ Determine la ecuación de la recta que pasa por $(3, 4)$ y es paralela a la recta que pasa por $(2, 0)$ y $(4, 1)$.

11. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(9, 5)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(7, 5)$ y $(3, 8)$.
    Resp.: $y = \frac{4}{3}x - 7$

12. Determinar la ecuación de la recta de pendiente -3 que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $x + y - 4 = 0$.
    Resp.: $y = 2 - 3x$

13. $(*)$ Determinar el área del triángulo que tiene por lados a los ejes coordenados y a la recta $3x + 2y - 6 = 0$

14. El punto P de segunda coordenada 11 está sobre la recta de pendiente 2 y que pasa por el punto $(3, 9)$. Determine la primera coordenada de P.
    Resp.: *4*

3. Inecuaciones

3.1. Inecuaciones básicas

Cuando nos preguntamos por los valores de una o más variables que hacen verdadera, hablamos de inecuaciones donde la (o las) variables se denominan incógnitas. Resolver una inecuación de la forma $\alpha(x) < \beta(x)$ (o de la forma $\alpha(x) \leq \beta(x)$, $\alpha(x) > \beta(x)$, o $\alpha(x) \geq \beta(x)$) es expresar en términos de un intervalo o de una unión de intervalos al conjunto$\big\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) < \beta(x)\big\}$ (cambiando la desigualdad en los respectivos casos)

Observación 3.1. *Propiedades importantes:*

1. *Si a, b son constantes reales, con a distinto de cero, entonces*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid ax + b > 0\} = \begin{cases}]-\dfrac{b}{a}, \infty[& si\ a > 0 \\ ]-\infty, \dfrac{b}{a}[& si\ a < 0 \end{cases}$$

2. *Considerando* $A := \big\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) \in \mathbb{R}\big\}$ *(el "dominio"de la expresión) se cumple* $A = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) > 0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) = 0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) < 0\big\}$ *donde los tres conjuntos son disjuntos entre ellos y el conjunto del centro aporta (algunos) bordes de los intervalos en que se expresan los otros dos conjuntos. Eso significa que resolver*$\alpha(x) < \beta(x)$ *ya me da información sobre*$\alpha(x) > \beta(x)$ *ya que sería casi el complemento en los reales del otro, salvo algunos bordes.*

3. $\big\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) \cdot \beta(x) > 0\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) > 0 \wedge \beta(x) > 0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) < 0 \wedge \beta(x) < 0\big\}$

Sea que se exprese como cadena de igualdades entre conjuntos o como una cadena de equivalencias "ssi", la idea es convertir la inecuación o su conjunto solución en una unión de intervalos mediante el uso de propiedades de orden, y con la estrategia de transformar la desigualdad en una desigualdad de 0 con productos y cocientes de factores simples. Para factores como los de la 1 propiedad se usa una tabla de valores.

Sea que se exprese como cadena de igualdades entre conjuntos o como una cadena de equivalencias "ssi", la idea es convertir la inecuación sin agregar ni quitar soluciones, hasta llevarla a una forma en que su conjunto solución sea una unión de intervalos y siguiendo la estrategia de transformar la desigualdad original en una desigualdad que compara a 0 con productos y cocientes de factores simples.

Ejemplo 3.1. *Resolver la inecuación* $x^2 - 3x > 0$

Solución: Para resolver la inecuación $x^2 - 3x > 0$, buscamos su conjunto solución, es decir, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x > 0\}$. Para ello, consideremos las siguientes equivalencias, donde $x \in \mathbb{R}$ es genérico

$$x^2 - 3x > 0 \text{ ssi } x(x-3) > 0 \underset{\text{(regla de signos)}}{\text{ssi}} \Big((x > 0 \text{ y } (x-3) > 0) \text{ ó } (x < 0 \text{ y } (x-3) < 0) \Big)$$

$$\text{ssi } \Big((x > 0 \text{ y } x > 3) \text{ ó } (x < 0 \text{ y } x < 3) \Big)$$

$$\boxed{\text{pero } (x > 0 \text{ y } x > 3) \text{ ssi } x > 3, \text{ y también } (x < 0 \text{ y } x < 3) \text{ ssi } x < 0}$$

$$\text{ssi } \big(x > 3 \text{ ó } x < 0 \big) \text{ ssi } x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]3, \infty[$$

Luego, el conjunto solución es $S = \,]-\infty, 0[\, \cup \,]3, \infty[$ $\square$

La herramienta fundamental en inecuaciones simples es la regla de signos: el producto o cociente de dos factores reales es positivo ssi ambos factores tienen igual signo. Ello se extiende a más factores multiplicados o divididos, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2. *Resolver* $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} > 0.$

<u>Solución:</u> Basta ver los signos de $(x-1)$, $(x-2)$ y $(x-3)$ Como cada uno de esos factores cambia de signo en un sólo punto, analizo sus signos en los intervalos que todos ellos determinan, tomando en cuenta que los factores del numerador no pueden ser cero porque la desigualdad es estricta, y el factor del denominador no puede ser cero para no dividir por cero:

1. Para $x \in \,]-\infty, 1[$ se tiene $(x-1) < 0$, $(x-2) < 0$ y $(x-3) < 0$. Luego, en este intervalo $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} < 0$, así que **no** es parte de la solución.

2. Para $x \in \,]1, 2[$se tiene $(x-1) > 0$, $(x-2) < 0$ y $(x-3) < 0$. Luego, en este intervalo $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} > 0$, así que **sí** es parte de la solución.

3. Para $x \in \,]2, 3[$ se tiene $(x-1) > 0$, $(x-2) > 0$ y $(x-3) < 0$. Luego, en este intervalo $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} < 0$, así que **no** es parte de la solución.

4. Para $x \in \,]3, \infty[$ se tiene $(x-1) > 0$, $(x-2) > 0$ y $(x-3) > 0$. Luego, en este intervalo $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} > 0$, así que **sí** es parte de la solución.

Luego, la solución es la *unión* de los casos que hacen verdadera la desigualdad: $]1, 2[\, \cup \,]3, \infty[$

El análisis anterior se puede resumir en una *Tabla de Signos*, en la cual dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos, en cada uno de los cuales cada factor tiene un signo definido: para ello, se consideran todos los puntos en que algún factor cambia de signo, y con ellos formamos los intervalos. Esos puntos "borde" se incluyen o no según si la desigualdad es estricta o no, y si pertenecen al dominio máximo de las funciones involucradas o no.:

	$-\infty$	1	2	3	∞
$(x-1)$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

La Tabla de Signos responde también que el conjunto solución es $]1,2[\,\cup\,]3,\infty[$ □

Ejemplo 3.3. *Resolver* $\dfrac{x-5}{2x^2+7} > 0$.

<u>Solución</u>: Notemos que el denominador no afecta al signo, ya que para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple $2x^2+7>0$. Luego, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{2x^2+7} > 0 &\text{ ssi } x-5>0\\ &\text{ ssi } x \in\,]5,\infty[\end{aligned}$$

El conjunto solución es entonces $]5,\infty[$. □

Ejercicio 3.1. *Resuelva la inecuación* $\dfrac{3x}{2x+1} > 1$ *(sugerencia: en vez de cometer el error de "pasar multiplicando $2x+1$" reste 1 para obtener una inecuación como la de los ejemplos previos)*

<u>Resp.</u>: $]-\infty,-1/2[\,\cup\,]1,\infty[$

Ejercicio 3.2. *Resuelva la inecuación* $\dfrac{(x-1)^5(x+3)^4}{(x-2)^3(x+5)^8} > 0$ *(sugerencia: recuerde la regla de signos y el signo de las potencias pares e impares... y cuidado con los ceros)*

<u>Resp.</u>: $]-\infty,-5[\,\cup\,]-5,-3[\,\cup\,]-3,1[\,\cup\,]2,\infty[$

3.2. Valor absoluto e inecuaciones

Definición 3.1. *El valor absoluto de un número real x se define por* $|x| := \begin{cases} x & \textit{si } x \geq 0 \\ -x & \textit{si } x<0 \end{cases}$

Ejemplo 3.4.

1. $|2| = 2$
2. $|-3| = -(-3) = 3$
3. $|0| = 0$
4. $|\dfrac{-2}{5}| = \dfrac{2}{5}$

Proposición 3.1. *Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumplen:*

1. $|x| \geq 0$, *y además* $|x| = 0$ *ssi* $x = 0$.
2. $|x|$ *es el mayor número entre* x *y* $-x$. *En símbolos,* $|x| = max\{-x, x\}$
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
4. $-|x| \leq x \leq |x|$
5. *(Desigualdad triangular)* $|x + y| \leq |x| + |y|$

Demostración.

1. Se obtiene directamente de la definición de valor absoluto.
2. Se obtiene directamente de la definición de valor absoluto.
3. Se justificará por casos:

   a) Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ entonces $|x| = x$ e $|y| = y$ por definición, y además $xy \geq 0$, por lo que $|xy| = xy$. Luego $|xy| = xy = |x||y|$, que es lo afirmado.

   b) Si $x \geq 0$ e $y < 0$ entonces $|x| = x$ e $|y| = -y$ por definición, y además $xy \leq 0$, por lo que $|xy| = x(-y) = |x||y|$, que es lo afirmado.

   c) Si $x < 0$ e $y \geq 0$ la demostración es análoga al caso anterior intercambiando x e y.

   d) Si $x < 0$ e $y < 0$ entonces $|x| = -x$ e $|y| = -y$ por definición, y además $xy > 0$, por lo tanto $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$, que es lo afirmado.

   Eso completa la demostración de esta afirmación.

4. Queda como ejercicio propuesto.
5. Por la Propiedad 4 se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumplen $|x| \geq x$ y $x \geq -|x|$ de lo que se obtiene $|x| \geq -x$. De modo análogo para todo $y \in \mathbb{R}$ se tienen $|y| \geq y$ y $|y| \geq -y$.

   Ahora sumando adecuadamente, se tiene $|x|+|y| \geq x+y$ a la vez que $|x|+|y| \geq -(x+y)$, de modo que por Propiedad 2 se obtiene $|x| + |y| \geq |x + y|$.

□

Ejemplo 3.5. *Resuelva la siguiente inecuación* $|x + 3| < 5x + 2$.

Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

1. Si $5x+2 \leq 0$ no habrá solución porque se tendría $0 \leq |x+3| < 5x+2 \leq 0$ y por transitividad se obtendría $0 < 0$, lo que es imposible. Se deben omitir del conjunto de soluciones al intervalo $\left]-\infty, -\frac{2}{5}\right]$

2. Si $x \in \left]-\frac{5}{2}, \infty\right[$ se cumplirá $5x+2 \geq 0$ y se aplica la propiedad asociada:

$$\begin{aligned} |x+3| < 5x+2 \text{ ssi } & (-(5x+2) < x+3 < 5x+2) \\ \text{ssi } & (-(5x+2) < x+3 \text{ y } x+3 < 5x+2) \\ \text{ssi } & (-6x < 5 \ \text{ y } \ -4x < -1) \\ \text{ssi } & \left(x > -\frac{5}{6} \text{ y } x > \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Luego, la solución es: $S = \left]\frac{1}{4}, \infty\right[\cap \left]-\frac{5}{2}, \infty\right[= \left]\frac{1}{4}, \infty\right[$ □

Ejemplo 3.6. *Resuelva la siguiente inecuación* $|2x-4| > x+1$.

<u>Solución</u>: Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

1. Si $x+1 < 0$ se cumplirá $x+1 < 0 \leq |2x-4|$ que no aporta nuevas restricciones. Luego, a las soluciones se agrega el intervalo $]-\infty, -1[$.

2. En $[-1, \infty[$ se tiene $x+1 \geq 0$ y se puede usar la propiedad respectiva:

$$\begin{aligned} |2x-4| > x+1 \text{ ssi } & (2x-4 < -(x+1) \ \text{ ó } \ x+1 < 2x-4) \\ \text{ssi } & (3x < 3 \ \text{ ó } \ 5 < x) \\ \text{ssi } & (x < 1 \ \text{ ó } \ 5 < x) \\ \text{ssi } & x \in (]-\infty, 1[\ \cup \ ]5, \infty[) \end{aligned}$$

Luego, la solución es: $S =]-\infty, -1[\cup]-\infty, 1[\ \cup \ ]5, \infty[=]-\infty, 1[\ \cup \ ]5, \infty[$ □

Cuando no hay propiedades que ayuden, se analiza por casos según los intervalos determinados por los *argumentos* de los valores absolutos (las expresiones "encerradas" en los valores absolutos).

Ejemplo 3.7. *Resuelva la inecuación* $|x+2| + |x-4| < 8$

<u>Solución</u>: Sea $x \in \mathbb{R}$. Como $x+2$ cambia de signo en $x=-2$, y $x-4$ cambia de signo en $x=4$, resolvemos la inecuación por intervalos:

- Si $x \in]-\infty, -2[$ entonces $x+2 < 0$ y $x-4 < 0$, de modo que $|x+2| = -x-2$ y $|x-4| = 4-x$. La inecuación queda, para este intervalo, como $-x-2+4-x < 8$. Resolviendo:

$$-x-2+4-x < 8 \text{ ssi } -2x < 6 \text{ ssi } x > -3$$

De modo que este caso aporta la solución $]-\infty, -2[\cap]-3, \infty[=]-3, -2[$.

- Si $x \in [-2, 4[$ entonces $x + 2 > 0$ y $x - 4 < 0$, de modo que $|x + 2| = x + 2$ y $|x - 4| = 4 - x$. La inecuación queda, para este intervalo, como $x + 2 + 4 - x < 8$. Resolviendo:

  $$x + 2 + 4 - x < 8 \text{ ssi } 6 < 8$$

  Como $6 < 8$ es verdadero independiente de x, entonces $x+2+4-x < 8$ tiene solución $\mathbb{R}$, y claramente la solución que este caso aporta es $[-2, 4[\cap \mathbb{R} = [-2, 4[$.

- Si $x \in [4, \infty[$ entonces $x+2 > 0$ y $x-4 > 0$, de modo que $|x+2| = x+2$ y $|x-4| = x-4$. La inecuación queda, para este intervalo, como $x + 2 + x - 4 < 8$. Resolviendo:

  $$x + 2 + x - 4 < 8 \text{ ssi } 2x < 10 \text{ ssi } x < 5$$

  De modo que este caso aporta la solución $[4, \infty[\cap]-\infty, 5[= [4, 5[$

Reuniendo las soluciones de cada caso, se tiene que la solución de $|x + 2| + |x - 4| < 8$ es $]-3, -2[\cup [-2, 4[\cup [4, 5[=]-3, 5[$. $\square$

3.3. Guía 5

1. Resuelva las siguientes inecuaciones, es decir encuentre todos los números reales que son soluciones de ella.

   a) $-3 < 2x + 5 < 7$
   b) $x < x^2 - 12 < 4x$
   c) $-6 \leq 5 - 2x < 2$
   d) $(x^2 - x - 6)(3x^2 + 19) \geq 0$
   e) $\dfrac{(x-5)(x+6)}{(x-1)} < 0$
   f) $x^2 - 3x + 2 < 0$
   g) $4x^2 - 8x + 3 \geq 0$
   h) $\dfrac{(2x+5)}{x-2} > 0$
   i) $x + \dfrac{2}{x} \leq 3$
   j) $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x - 3} > 0$
   k) $\dfrac{(x+5)(x-8)}{x^2+5} > 0$
   l) $\dfrac{x-2}{(x+3)(x-5)} \leq 0$

2. Establezca en cada caso la vinculación explícita entre la inecuación planteada y la operación entre intervalos:

   a) Inecuación $\dfrac{x+4}{x-3} > 0$ y operación $\big(]-4,\infty[\ \cap\ ]3,\infty[\big) \cup \big(]-\infty,-4[\ \cap\ ]-\infty,3[\big)$
   b) Inecuación $\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x+2)} < 0$ y operación $\Big(\big(]-\infty,-4[\cup]1,\infty[\big) \cap]-\infty,-2[\Big) \cup \big(]-4,-2[\cap]-2,\infty[\big)$

3. Determine el conjunto de todos los números reales que cumplen con la condición dada:

   a) $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$
   b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$
   c) $\sqrt{x} \in \mathbb{R}^-$
   d) $\sqrt{x-5} \in \mathbb{R}^+$
   e) $\dfrac{x-5}{\sqrt{x+2}} \in \mathbb{R}^+$
   f) $(2x+1)\sqrt{2x+9} \in \mathbb{R}^-$
   g) $\sqrt{(x-5)(x+8)} \in \mathbb{R}$
   h) $\dfrac{3}{1-\sqrt{x+1}} \in \mathbb{R}$
   i) $\dfrac{1-\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{x+6}} \in \mathbb{R}$

4. Resuelva las siguientes inecuaciones

   a) $3x - 2 > 0$
   b) $\dfrac{x+2}{3-x} > 1$
   c) $(x-2)(x+1) < (x+2)(x-1)$
   d) $\dfrac{x-2}{x-1} < \dfrac{x+2}{x+1}$
   e) $\dfrac{3x-2}{x^2+1} > 0$
   f) $\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+1} > 1$
   g) $x^2 - 4 < 0$

h) $(x+2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right) \leq 0$

i) $4x^2 + 3x \leq x^2 - 2x + 2$

j) $\dfrac{(x^2+4)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x^2+1)} < 0$

k) $\dfrac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^3 - x^2 + x - 1} < 0$

l) $\dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x + 1} < 3$

m) $(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) > 0$

n) $|2x-1| \leq 3$

ñ) $x + |x| \leq 4$

o) $|x-4| > x - 2$

p) $|x-7| < 5 < |5x - 25|$

q) $|x^2 - x| + x > 1$

r) $\left|\dfrac{x+2}{3-x}\right| < 1$

s) $|x+2| + |x-1| \leq 5$

t) $|x+2| \leq 1 + |x+3|$

5. Resuelva las siguientes inecuaciones,

a) $x + 1 > \sqrt{x^2 - 4}$

b) $4x - 2 > \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $8x - 3 < \sqrt{(x-6)(x-9)}$

d) $|3 - 2x| < 5$

e) $|1 - 3x| > 2$

f) $2 \leq |4 - 5x| \leq 4$

g) $|x+2| + |2x-1| \leq 2$

h) $|x+3| + |3-x| \leq |x|$

i) $x - |x| > 2$

4. Funciones

Definición 4.1. 1. *Sean A y B conjuntos no vacíos. Una* función *f de A en B es un objeto matemático que asigna a cada objeto x de A un único objeto $f(x)$ de B llamado* imagen de x por f.

2. *Definimos $f : A \to B$ como la afirmación de que f es una función* [1] *del conjunto A en el conjunto B.*

3. *Si $f : A \to B$, el conjunto A es llamado* dominio *de f y denotado* $\mathrm{dom}(f)$*, mientras B es llamado* codominio *de la función y denotado* $\mathrm{cod}(f)$.

4. *Si f es una función, se denomina* regla de asignación de f *a la manera que determina la imagen $f(x)$ para cada elemento de x de* $\mathrm{dom}(f)$.

Observación 4.1.
- *Una función que cumpla $f : A \to B$ es un objeto con tres componentes: dominio (A), codominio (B) y la regla de asignación $x \mapsto f(x)$, $x \in A$. La regla de asignación puede ser dada de modo algebraico, algorítmico, o ser implícita.*
- *Note que siempre se cumple que $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(f)$. En particular, al afirmar que $f : A \to B$ siempre se cumplen $A = \mathrm{dom}(f)$ y $B = \mathrm{cod}(f)$.*
- *Como acá se habla de conjuntos, es bueno aclarar algunos conceptos básicos de conjuntos, para lo cual puede ver el Apéndice A al final de esta sección.*

Proposición 4.1. *Dos funciones f y g son iguales (es la misma función) cuando* $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ *y* $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ *y para cada x del dominio se tiene $f(x) = g(x)$* [2].

Ejemplo 4.1. *Considere $f : [0, 345[\to [-3, \infty[$ dada por $f(x) = 3x+48$. Como $1 \in [0, 345[= \mathrm{dom}(f)$ se tiene $f(1) = 3 \cdot 1 + 48 = 51$, y como $22.5 \in [0, 345[$ se tiene $f(22,5) = 115.5$, pero no existe imagen de -2 por f pese a que $3(-2) + 48$ existe, porque $-2 \notin [0, 345[$, es decir, la función f no tiene imagen para -2.* □

Observación 4.2.
- *Como el ejemplo anterior muestra, el dominio de una función no siempre es "el conjunto de todos los números reales para los que el resultado es un número real", es decir, el dominio no sólo tiene que ver con "no dividir por cero" o "no sacar raíz de negativos".*
- *Sin embargo, esas restricciones siguen siendo válidas; por ejemplo, no se cumple $f : [-3, 4] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x}$ ya que la regla de asignación no puede dar imagen para los negativos que están presentes en el dominio $[-3, 4]$.*

[1] En ese caso, f es el nombre de la función.

[2] Aunque las expresiones para $f(x)$ y $g(x)$ se escriban diferente, lo que importa es que asignen la misma imagen a cada objeto, como en el caso de $(x + 1)^2$ y $x^2 + 2x + 1$, que tienen el mismo valor para cualquier número x.

- *Lo que ocurre es que si nos mantenemos en un conjunto referencial, por ejemplo $\mathbb{R}$, del cual dominio y codominio sean subconjuntos, dada una expresión algebraica hay un* dominio natural *o* dominio más amplio *que esa regla pueda aceptar. Por ejemplo, para $\dfrac{1}{x-2}$ el dominio más amplio es $\mathbb{R} \setminus \{2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$. Por otra parte, es perfectamente válida la función $g : [-2,0] \to]-\infty, 3[$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ aunque su dominio no sea el más amplio.*

- *Un dominio que no es "el más amplio posible" ocurre con frecuencia al aplicar funciones para modelar situaciones reales: por ejemplo, una función que indique la presión de un gas a distintas temperaturas tendrá un dominio adecuado a las temperaturas consideradas, por ejemplo, $[0, 5.000]$ en grados Kelvin, es decir, temperaturas entre 0 y 5000 grados Kelvin.*

Definición 4.2. *Una función se dice "función real de variable real" cuando tanto su dominio como su codominio son subconjuntos de $\mathbb{R}$.*

Observación 4.3.

- *En este curso, salvo que se avise lo contrario, las funciones a considerar serán funciones reales de variable real.*

- *En ese contexto, a veces se indicará sólo la regla de asignación, en cuyo caso se asumirá que su codominio es $\mathbb{R}$ y que su dominio es el más amplio posible, es decir, $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$.*

- *Según las restricciones de un contexto, puede darse el codominio B y la regla y esperar el dominio más amplio (o dominio máximo) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$.*

- *De todos, modos, sin saber dominio no se conoce la función, por lo que en realidad los dos casos anteriores se tratan de buscar una función que cumpla algunas condiciones (se conoce su regla y su codominio, y se busca el dominio más amplio).*

Ejemplo 4.2. *Para determinar la función $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ que tiene regla de asignación $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y dominio máximo en $\mathbb{R}$, hacemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(f) &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x+2} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+2 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\} = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[\end{aligned}$$

$\square$

Por otra parte, en diversas aplicaciones se esperan un dominio o un codominio restringido por la misma aplicación. Es el caso de funciones cuyo resultado es temperatura, en que carece de sentido que el resultado de la medición sea inferior a -273,15 C°, sin importar si la regla de asignación de la función puede entregar valores inferiores.

Ejemplo 4.3. *Para determinar una función* $f : \mathrm{dom}(f) \to]-273, \infty[$, *con regla de asignación* $f(x) = 3x + 5$, *y con dominio más amplio dento de* $\mathbb{R}$, *hacemos:*

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in]-273, \infty[\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -273 < 3x + 5\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-273 - 5}{3} < x\right\} = \left]\frac{-278}{3}, \infty\right[\end{aligned}$$

□

El codominio de una función es el conjunto al que pertenecen las imágenes o *resultados* de una función, pero no siempre es igual al conjunto de resultados de la función.

Definición 4.3. *Sea f una función. El* recorrido *de f (también llamado* Imagen *de f) es el conjunto*

$$\mathrm{rec}(f) := \{f(x) \in B \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$$

es decir, el recorrido de una función es el subconjunto del codominio formado por las imágenes de los elementos del domino al aplicarles la función.

Proposición 4.2. *Dada una función f se cumple:*

$$\mathrm{rec}(f) = \big\{y \in \mathrm{cod}(f) \mid y = f(x) \textit{ para algún } x \in \mathrm{dom}(f)\big\}$$

Ejemplo 4.4. *Para determinar el recorrido de* $f : [1, 6] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 2x - 9$, $x \in [1, 6]$, *utilizamos la propiedad anterior:*

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = 2x - 9 \textit{ para algún } x \in [1, 6]\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{y + 9}{2} \textit{ para algún } x \in [1, 6]\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq \frac{y + 9}{2} \leq 6\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y + 9 \leq 12\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid -7 \leq y \leq 3\} = [-7, 3] \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.5. *Encuentre recorrido de* $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}(f) &= \{y \in \mathrm{cod}(f) \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathrm{dom}(f)\} = \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2} \text{ para algún } x \in [-2, 2]\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 = 4 \text{ para algún } x \in [-2, 2]\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ y } x^2 = 4 - y^2 \text{ para algún } x \in [-2, 2]\}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \wedge 4 - y^2 \geq 0\} \\ &= [0, 2] \end{aligned}$$

□

Ejercicio 4.1. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *función definida por* $f(x) = x^2+1$. *Pruebe que* $\text{rec}(f) = [1, \infty[$.

Ejemplo 4.6. *Sea* $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} \to \mathbb{R}$ *función definida por* $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$. *Encuentre dominio y recorrido más amplios para* f.

<u>**Solución**</u>**:**

$$\begin{aligned}
\text{rec}(f) &= \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x+3}{x-2} \text{ para algún } x \neq 2 \right\} \\
&= \{ y \in \mathbb{R} \mid x(y-1) = 3 + 2y \text{ para algún } x \neq 2 \} \\
&= \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1 \text{ y } x = \frac{3+2y}{y-1} \text{ para algún } x \neq 2 \right\} \\
&= \{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1 \}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.7. *Considere la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si\ x \leq 0 \\ x^2 + 1 & si\ 0 < x \end{cases}$$

Calcule $f(a^2+5)$, *para* $a \in \mathbb{R}$ *arbitrario y calcule también* $\text{rec}(f)$.

<u>**Solución**</u>**:** La función f es un ejemplo de función definida por casos (también llamada por tramos), en que para distintos subconjuntos del dominio la regla de asignación cambia de forma. En este caso, los subconjuntos son intervalos contiguos.

- Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces $a^2 + 5 > 0$ por lo que $f(a^2+5) = (a^2+5)^2 + 1 = a^4 + 10a^2 + 26$.
- Para calcular el recorrido, observe que el recorrido será la unión de los recorridos "parciales" que entrega cada subintervalo con su propia regla de asignación:

$$\begin{aligned}
rec_1(f) &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x \leq 0 \text{ con } y = 2x - 3 \} \\
&= \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x \leq 0 \text{ con } \frac{y+3}{2} = x \leq 0 \right\} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y + 3 \leq 0 \} =]-\infty, -3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
rec_2(f) &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x > 0 \text{ con } y = x^2 + 1 \} \\
&= \{ y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x > 0 \text{ con } y - 1 = x^2 > 0 \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y - 1 > 0 \} =]1, \infty[
\end{aligned}$$

Luego, $\text{rec}(f) = rec_1(f) \cup rec_2(f) =]-\infty, -3] \cup]1, \infty[$

□

4.1. Álgebra de funciones

Definición 4.4. *Dadas dos funciones reales f y g, se definen las siguientes funciones a partir de ellas:*

1. *Suma* $f+g : \big(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)\big) \to \mathbb{R}$, *con* $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ *para cada* $x\in\mathrm{dom}(f+g)$.
2. *Producto:* $fg : \big(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)\big) \to \mathbb{R}$, *con* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *para cada* $x \in \mathrm{dom}(fg)$.
3. *Multiplicación por escalar: si* $\lambda\in\mathbb{R}$ *es constante,* $\lambda f : \mathrm{dom}(f)\to\mathbb{R}$, *con* $(\lambda f)(x) = \lambda\big(f(x)\big)$ *para cada* $x\in\mathrm{dom}(\lambda f)$.
4. *Cociente:* $\dfrac{f}{g} : \{x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g) \mid g(x)\neq 0\}\to\mathbb{R}$, *definida por* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *para cada* $x \in\in \mathrm{dom}\left(\dfrac{f}{g}\right)$.

Ejercicio 4.2. *Calcule,* $f+g, fg, \dfrac{f}{g}, \dfrac{g}{f}$ *para las funciones* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *y* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *con* $f(x) = 3x-20$, *y* $g(x) = \begin{cases} 2x & \textit{si } x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \textit{si } 1\le x<4 \\ 3 & \textit{si } x\ge 4 \end{cases}$

4.2. Composición de funciones

Hay otra forma de crear funciones, que es componerlas:

Definición 4.5 (Composición)**.** *Dadas g y f funciones, definimos la* composición *de g con f (en ese orden) y denotada $g\circ f$, por*

- $\mathrm{dom}(g\circ f) = \{x\in\mathrm{dom}(f) \mid f(x)\in\mathrm{dom}(g)\}$
- $\mathrm{cod}(g\circ f) = \mathrm{cod}(g)$
- $\big(g\circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)$ *para cada* $x\in\mathrm{dom}(g\circ f)$

Observación 4.4.

- *La composición $g\circ f$ no existe si* $\mathrm{dom}(g\circ f)=\emptyset$.
- *Siempre se cumple la equivalencia* $\mathrm{dom}(g\circ f)=\emptyset$ *ssi* $\mathrm{rec}(f)\cap\mathrm{dom}(g)=\emptyset$.
- *Dado lo anterior, cuando* $\mathrm{rec}(f)\subseteq\mathrm{dom}(g)$ *se tiene* $\mathrm{dom}(g\circ f)=\mathrm{dom}(f)\neq\emptyset$, *es decir, este es el caso fácil de composición.*

La Figura 2 ilustra el mecanismo; en ese caso $A=\{a,b,c\}$, $B=C=\{p,q,r,s\}$ y $D=\{t,u,v,w\}$, de donde $f_2\circ f_1 : \{a,b\}\to D$ con $(f_2\circ f_1)(a)=u$ y $(f_2\circ f_1)(b)=w$.

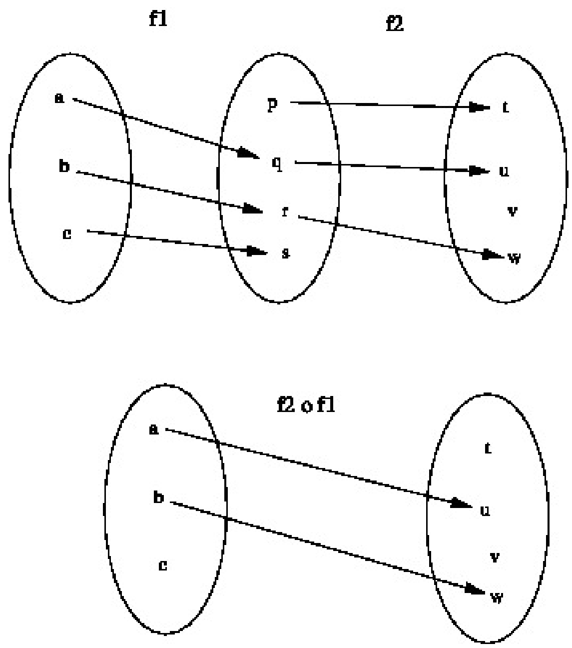


Figura 2: Idea de la composición de funciones.

Ejercicio 4.3. *Sean* $F : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, *funciones definidas por* $F(x) = -x$, $G(x) = x^2$. *Calcular* $(G \circ F)(-5)$ *y determine para que valores de* x *existe* $(G \circ F)(x+3)$.

Ejemplo 4.8. *Suponga que el costo total en pesos de fabricar* q *unidades de determinado producto está dado por la función* $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$.

1. *Calcular el costo de producir 10 unidades del producto.*

2. *Calcular el costo de producir la décima unidad del producto.*

<u>Solución</u>:

1. El costo de producir 10 unidades del producto $= C(10) = 10^3 - 30(10)^2 + 500(10) + 200 =$ 3200 pesos.

2. El costo de producir la décima unidad del producto es la diferencia entre el costo de fabricación de 10 unidades y el costo de fabricación de 9 unidades. Es decir, costo de la décima unidad $= C(10) - C(9) = 3200 - 2999 = 201$ pesos.

$\square$

Ejemplo 4.9. *Suponga que la función* $y = F(x) = 50 + 2x$ *representa el salario semanal que percibe un vendedor, el que se encuentra determinado por el número de unidades* x *vendidas en la semana. Si a esto agregamos que la cantidad* x *vendida semanalmente depende del precio del producto y que tal cantidad está dada por* $x = G(p) = 150 + 2,5p$ *entonces el sueldo semanal se puede expresar directamente en función del precio por unidad. ¿Cuál es esta función ?*

Solución: $y = F(G(p)) = F(150 + 2,5p) = 2(150 + 2,5p) + 50 = 350 + 5p$.

Para un caso concreto, si el producto se vende a 100 pesos en una semana, entonces la cantidad que puede vender es $x = 150 + 2,5 \cdot 100 = 400$ unidades. Esto le reporta un sueldo en esa semana de $y = F(400) = 2 \cdot 400 + 50 = 850$ pesos. □

4.3. Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Inversas

Definición 4.6. *Sea f una función. Diremos que:*

1. *f es sobreyectiva ssi* $\operatorname{rec}(f) = \operatorname{cod}(f)$
2. *f es inyectiva ssi para todos $x, y \in \operatorname{dom}(f)$ se cumple que $f(x) = f(y)$ implica $x = y$*
3. *f es biyectiva ssi f es inyectiva y sobreyectiva.*

Una función $f : A \to B$ es *invertible* ssi es *biyectiva*. En tal caso su *inversa* es la función denotada f^{-1} con $f^{-1} : B \to A$ que cumple que para todo $x \in A$ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y para todo $y \in B$ $(f \circ f^{-1})(y) = y$. Sin embargo, sabiendo que f es biyectiva, basta comprobar sólo una de los dos condiciones dadas.

Observación 4.5. ***No confunda*** *la función inversa f^{-1} con el recíproco de f, que cumple* $(f(x))^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$

Ejemplo 4.10. *Para cada una de las siguientes funciones determine si es inyectiva:*

1. $f : [5, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{5x + 3}{x - 3}$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + x + 7}$

Solución:

1. *Sean $x_1, x_2 \in [5, \infty[$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. ¿Será verdad que $x_1 = x_2$?*

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) \therefore \frac{5x_1 + 3}{x_1 - 3} = \frac{5x_2 + 3}{x_2 - 3} \quad & \therefore (5x_1 + 3)(x_2 - 3) = (5x_2 + 3)(x_1 - 3) \\
& \therefore 5x_1x_2 - 15x_1 + 3x_2 - 9 = 5x_2x_1 - 15x_2 + 3x_1 - 9 \\
& \therefore -15x_1 + 3x_2 = -15x_2 + 3x_1 \quad \therefore -5x_1 + x_2 = -5x_2 + x_1 \\
& \therefore -6x_1 = -6x_2 \quad \therefore x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

Luego f es inyectiva.

2. *Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. ¿Será verdad que $x_1 = x_2$?*

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \therefore \frac{5}{x_1^2 + x_1 + 7} = \frac{5}{x_2^2 + x_2 + 7} \therefore x_1^2 + x_1 + 7 = x_2^2 + x_2 + 7$$
$$\therefore x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2 \quad \therefore x_1^2 + x_1 - x_2^2 - x_2 = 0 \quad \therefore x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 = 0$$
$$\therefore (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0 \quad \therefore (x_1 - x_2)[x_1 + x_2 + 1] = 0$$

Esta última igualdad no implica que $x_1 - x_2 = 0$. Tomemos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 + x_2 + 1 = 0$, por ejemplo, $x_1 = 1, x_2 = -2$ y se tiene que $f(1) = \frac{5}{9}$, $f(-2) = \frac{5}{9}$ pero $1 \neq -2$ luego f no es inyectiva.

$\square$

Ejemplo 4.11. *Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por* $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & si\ x \geq 1 \\ 3x + 4 & si\ x < 1 \end{cases}$

Pruebe que f es biyectiva y determine su función inversa.

Solución:

1. *Para determinar si f es sobreyectiva, calculamos su recorrido y lo comparamos con su codominio $\mathbb{R}$. Para ello, se tiene que $\mathrm{rec}(f) = \mathrm{rec}(f_1) \cup \mathrm{rec}(f_2)$ donde*

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}(f_1) &= \{y \in \mathbb{R} \mid \ \textit{existe } x \geq 1 \textit{ con } y = x^2 + 6\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \ \textit{existe } x \geq 1 \textit{ con } y - 6 = x^2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y - 6 = x^2 \geq 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y - 6 \geq 1\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7\} = [7, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}(f_2) &= \{y \in \mathbb{R} \mid \ \textit{existe } x < 1 \textit{ con } y = 3x + 4\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \ \textit{existe } x < 1 \textit{ con } y - 4 = 3x\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y - 4 < 3\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 7\} =] - \infty, 7[\end{aligned}$$

Luego $\mathrm{rec}(f) = [7, +\infty[\cup] - \infty, 7[= \mathbb{R}$ y f es sobreyectiva.

2. *Para determinar si f es inyectiva, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Se presentan 3 casos según el intervalo al que pertencen ambos números*

   a) *Caso $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$.*

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \ &\textit{ssi } x_1^2 + 6 = x_2^2 + 6 \quad \textit{ssi } x_1^2 = x_2^2 \quad \textit{ssi } x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\textit{ssi } (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \end{aligned}$$

   Como $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$, se tiene que $x_1 + x_2 \neq 0$. Luego $x_1 - x_2 = 0$, es decir, $x_1 = x_2$, por lo que f no contradice inyectividad en este caso.

   b) *Caso $x_1 < 1, x_2 < 1$.*

$$f(x_1) = f(x_2) \ \textit{ssi } 3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \ \textit{ssi } 3x_1 = 3x_2 \ \textit{ssi } x_1 = x_2$$

   Luego en este caso f tampoco contradice inyectividad.

c) *Caso* $x_1 \geq 1, x_2 < 1$.

En este caso se tiene que $x_1 \neq x_2$ *para demostrar que* f *es inyectiva probaremos que* $f(x_1) \neq f(x_2)$*, que equivale a mostrar que no se contradice inyectividad* [3].

Tenemos que $f(x_1) = x_1^2 + 6 \geq 7 > 3x_2 + 4 = f(x_2)$ *es decir,* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *por lo que en este caso* f *tampoco contradice inyectividad.*

d) *Caso* $x_1 < 1, x_2 \geq 1$.

Este caso es análogo al anterior, se trata sólo de un cambio de nombres.

Luego f *es inyectiva ya que en ningún caso se contradice su inyectividad.*

Al ser inyectiva y sobreyectiva, obtenemos que f *es biyectiva y entonces existe función inversa* f^{-1}*. Además,* $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{rec}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{rec}(f^{-1} = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. *Veamos la regla de asignación. Usaremos el hecho de que* $y = f(x)$ *ssi* $x = f^{-1}(y)$

Vimos que en el cálculo del recorrido de f *separamos en dos casos para buscar* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = y$.

1. *Si* $y \geq 7$*, sea* $x = \sqrt{y-6}$*. Tenemos que* $y - 6 \geq 1$*, luego* $x \geq 1$ *y* $f(x) = f(\sqrt{y-6}) = (\sqrt{y-6})^2 + 6 = y$.

2. *Si* $y < 7$*, sea* $x = \dfrac{y-4}{3}$*. Luego* $x < 1$ *y* $f(x) = f(\dfrac{y-4}{3}) = 3\dfrac{y-4}{3} + 4 = y$.

La función inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida por* $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-6} & si\ y \geq 7 \\ \dfrac{y-4}{3} & si\ y < 7 \end{cases}$ □

Ejemplo 4.12. *Determine si es sobreyectiva, inyectiva o biyectiva la función* $f : [-3, 8] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 2x^2 - 16x + 23$.

[3] En realidad, este caso se puede descartar mirando el aporte al recorrido de cada intervalo, porque al estar en intervalos distintos los valores x_1 y x_2, sus imágenes estarán en esos aportes al recorrido, que ya vimos son disjuntos.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rec}(f) &= \{y \in \operatorname{cod}(f) \mid \text{ existe } x \in \operatorname{dom}(f) \text{ con } y = f(x)\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x \in [-3,8] \text{ con } y = 2x^2 - 16x + 23\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x \in [-3,8] \text{ con } y = 2(x-4)^2 - 9\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x \in [-3,8] \text{ con } \frac{y+9}{2} = (x-4)^2\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x \in [-3,4] \text{ con } \frac{y+9}{2} = (x-4)^2\right\} \\
&\qquad \bigcup \left\{y \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } x \in [4,8] \text{ con } \frac{y+9}{2} = (x-4)^2\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{y+9}{2} \in [0,49]\right\} \bigcup \left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{y+9}{2} \in [0,16]\right\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid y \in [-9,89]\} \cup \{y \in \mathbb{R} \mid y \in [-9,23]\} \\
&= [-9,89] \cup [-9,23] \\
&= [-9,89]
\end{aligned}
$$

Luego $\operatorname{rec}(f) = [-9,89]$ y como $\operatorname{cod}(f) = \mathbb{R}$, entonces f no es sobreyectiva y por tanto no es biyectiva. Por otra parte, el análisis del recorrido de f indica que cada valor de $]0,23]$ es imagen de dos valores del dominio, uno de $[-3,4[$ y otro de $]4,8]$, por ejemplo $f(3) = -7 = f(5)$, por lo que f tampoco es inyectiva. $\square$

4.4. Guía 5

Funciones

1. Para las funciones siguientes, determine si existe la imagen de 4, calculándola en caso de que exista, o justificando el por qué no existe:

   a) $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$
   b) $f : [-3, 7] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{8 - x}$
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4 - x^2$
   d) $f :]-\infty, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{5 - x}$
   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{18}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

2. Determine cuales de las siguientes ecuaciones determina a la variable "y" como una función de la variable "x", aprovechando su conocimiento de cónicas; pero si no corresponde a una función, restrinja cada variable a un intervalo razonable donde sí resulte una función.

   a) $x^2 + 6x - 2y^2 + 17 = 0$
   b) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$
   c) $3x^2 + 12x + 5y^2 - 20y + 17 = 0$
   d) $-3y^2 + 6y + 4x^2 + 8x - 11 = 0$

3. Calcule en cada caso el recorrido de la función

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 5x + 2$
   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x^2 - 12x + 2$
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5 - x^2$
   d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 10 - 6x - x^2$
   e) $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 4$
   f) $f : [3, 8] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 - 5x$
   g) $f :]-3, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{3}{x + 7}$
   h) $f : [1, 5[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x - 5}$
   i) $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1}$

4. Para $f(x) = \begin{cases} (x-1)^{-1} & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ determine $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$, $(f(2) + f(-3))$ y $\operatorname{rec}(f)$.

5. Calcule, para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{si } \; -2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 3 & \text{si } \; x \; < \; -2 \end{cases}$

   a) $f(2)$
   b) $f(\sqrt{x-4})$
   c) $f(-3)$
   d) $f(\sqrt{2})$
   e) $f(2) + f(-3)$
   f) $\text{rec}(f)$

6. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$. Determine una expresión para $f + g$, fg y $\dfrac{f}{g}$, mostrando explícitamente el dominio en cada caso.

7. Calcule $f+g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ para las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x-5$ y $g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

8. Calcule $f + g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ para las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 3x - 20$ y $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

9. Dadas las funciones $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, determine si existen las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y, en caso de existir, determine dominio y regla de asignación.

10. Calcule los dominios más amplios de las siguientes funciones $f : \text{dom}(f) \to \mathbb{R}$ cuyas reglas de asignación están dadas por

    a) $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$
    b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$
    c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$
    d) $f(x) = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 2}$
    e) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$
    f) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 2}$

11. Determine en cada caso dominio y recorrido más amplios de la función con regla de asignación dada:

    a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

d) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 4 \\ 3-x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 0 \\ 2x-3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 2 \\ \dfrac{x}{3-x} & \text{si } x < 2 \end{cases}$

12. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas por $f(x) = 3x - 7$ y $g(x) = x^3$.

    a) Determine las funciones siguientes: $(f+g)$, $(g-3f)$ $(g+12f)$, (fg), $\dfrac{f}{g}$, y (gf).

    b) Determine las funciones siguientes: $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$ y $(g \circ g)$

13. Determine dominio y recorrido de la función $f \circ g$ donde $f :]-\infty, 8[\to \mathbb{R}$ y $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ están dadas por $f(x) = \sqrt{10-x}$ y $g(x) = x^2 + 4$.

14. Determine dominio y recorrido de la función $f \circ g$ donde $f :]-\infty, -2[\to \mathbb{R}$ y $g :]2, \infty[\to \mathbb{R}$ están dadas por $f(x) = \sqrt{3-x}$ y $g(x) = x^2 + 2$.

15. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas por $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = 2^x$. Determine las funciones siguientes: $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$, y $(g \circ g)$.

16. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Determine si existen $f \circ g$ y $g \circ f$ y en caso de existir, determine su dominio y regla de asignación.

17. El período T (en segundos) de un péndulo simple de longitud L (en pies) está dada por $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{32}}$. Si $3 < L < 4$. ¿Cuál es el rango de valores posibles de T?.

18. Si consideramos la fórmula $F = \dfrac{9}{5}C + 32$ que relaciona la medida de temperatura en grados Celsius (C) y en Fahrenheit (F), responda:

    a) ¿Cuál es el Dominio de la función?

b) Considerando válida la relación para temperaturas en que el agua se mantiene líquida, ¿qué dominio y qué recorrido tiene ahora la función?

c) Para qué valor en Fahrenheit el agua hierve y para qué valor en Fahrenheit el agua se congela?

d) ¿Cuál es la temperatura media del ser humano en Fahrenheit?

19. Un estudio ambiental en cierta comunidad suburbana revela que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire es $C(p) = 0.5p + 1$ por partes por millón cuando la población es de p miles. Se estima que dentro de t años la población será de $P(t) = 10 + 0.1t^2$ miles

    a) Expresar el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.

    b) ¿Cuándo llegará a $6,8$ partes por millón el monóxido de carbono?.

20. Un importador de café brasileño estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $Q(p) = \frac{1}{p^2}4.374$ kg. de café por semana cuando el precio sea p pesos por kg. Se estima que dentro de t semanas el precio será $p(t) = 0.04t^2 + 0.2t + 12$ pesos por kg.

    a) ¿Expresar la demanda de consumo semanal de café como función del tiempo.

    b) Dentro de 10 semanas, ¿cuántos kg. de café comprarán los consumidores al importador?.

    c) ¿Cuándo llegará a 30.375 kg. la demanda de café?.

21. Para cada una de las siguientes funciones determine si es inyectiva, y si no lo es, restrinja su dominio de manera de obtener una función inyectiva:

    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$

    b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x + 1}$

    c) $f : (]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

22. Dadas $f : [3, \infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{2x + 7}{x - 2}$ y $g : [17, \infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 8$.

    a) Pruebe que f es inyectiva.

    b) Determine $g \circ f$.

23. Para cada una de las siguientes funciones determine su recorrido y si es o no biyectiva. Si lo es, calcule su función inversa.

a) $f : (\mathbb{R} - \{-9/2\}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2x+9}$

b) $f : (\mathbb{R} - \{-1/2\}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+7}{2x+1}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 2 \\ 4 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

24. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x \end{cases}$

    Pruebe que f es biyectiva y determine su función inversa.

25. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } -1 < x \end{cases}$

    Determine si f es biyectiva, si g es biyectiva y encuentre $(g \circ f)^{-1}$.

26. En cada caso, determine si la función es inyectiva, y de no serlo, determine un subconjunto del dominio de la función de modo que la restricción de la regla de asignación al subconjunto sí sea inyectiva:

    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5 - (x - 1)^2$

    b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

    c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x + 1}$

5. Funciones y modelos

Al usar funciones para representar la relación entre variables de una situación nos debemos cuidar de representar de modo razonable la relación como regla de asignación, si estamos seguros de que la relación es realmente una función, y de que dominio y codominio tienen sentido.

Ejemplo 5.1. *Un determinado fármaco que regula la temperatura corporal se inyecta por vía muscular. Su efecto, en horas, depende de la dosis x, en milígramos, según la aproximación* $E = \dfrac{74x}{8x+3}$.

1. *¿Qué función modela la situación?*
2. *¿Qué rango de dosis se requiere para que el fármaco tenga efecto entre 4 y 8 horas?*

<u>Solución</u>:

1. *La regla de asignación está indicada, y de acuerdo al contexto, el dominio no debiera ser negativo (no se extrae medicamento del paciente) y, aunque obviamente la dosis no debe superar una cierta cantidad por kilogramo de peso del paciente, no impondremos restricción adicional al dominio por falta de información; luego, usamos* $\mathrm{dom}(f) = [0, \infty[$.

   Para el codominio, consideramos horas desde cero a mayores que cero, ya que no tiene sentido que haya efecto antes de administrada la dosis. A falta de más información, usamos $\mathrm{cod}(f) = [0, \infty[$.

   Luego, la función es $E : [0, \infty[\to [0, \infty[$ *con* $E(x) = \dfrac{74x}{8x+3}$.

2. *Para que el efecto dure entre cuatro a ocho horas, la dosis* $x \geq 0$ *debe cumplir que*

   $$4 \leq E(x) \leq 8 \quad \textit{ssi} \quad 4 \leq \frac{74x}{8x+3} \leq 8$$

   Resolviendo por separado las dos inecuaciones e intersectando las soluciones, dado que son simultáneas:

   $$4 \leq \frac{74x}{8x+3} \quad \textit{ssi} \quad 0 \leq \frac{74x}{8x+3} - 4 = \frac{42x-12}{8x+3} \quad \textit{ssi} \quad x < -\frac{3}{8} \textit{ o bien } x \geq \frac{2}{7}$$

   Y la otra inecuación:

   $$\frac{74x}{8x+3} \leq 8 \quad \textit{ssi} \quad 0 \leq 8 - \frac{74x}{8x+3} = \frac{24-10x}{8x+3} \quad \textit{ssi} \quad -\frac{3}{8} \leq x \leq \frac{12}{5}$$

   Luego, $4 \leq \dfrac{74x}{8x+3} \leq 8 \quad \textit{ssi} \quad \dfrac{2}{7} \leq x \leq \dfrac{12}{5}$

   de modo que la dosis necesaria para que el efecto del medicamento dure entre cuatro y ocho horas es entre $\frac{2}{7} \approx 0.29$ *mg y* $\frac{12}{5} = 2.4$ *mg.*

$\square$

5.1. Guía 7

1. Las estufas de gas para cocinas son una fuente de contaminantes interiores, como el monóxido de carbono y el bióxido de nitrógeno. Una de las maneras más eficaces de eliminar los contaminantes del aire mientras se cocina es usar una campana de *ventilación*. Si una campana de ventilación elimina F litros de aire por segundo, el porcentaje P de contaminantes que también se eliminan del aire alrededor está dado, según una estimación para $10 \leq F \leq 75$, por una relación lineal (una recta). Cuando $F = 10$ litros por segundo, se remueve el 17.78 % de los contaminantes, y cuando $F = 30$ litros por segundo, se remueve el 38.98 % de los contaminantes.

   a) Exprese la relación entre F y P mediante una función, justificando la elección del dominio y del codominio según el contexto.

   b) Determine cuántos litros de aire por segundo deben eliminarse por el ventilador para eliminar más de 58 % de contaminantes. Exprese su respuesta en litros (redondeando).

2. La cantidad de bosques de lluvia tropical en Centroamérica decreció de 337000 kilómetros cuadrados en 1969 a 208000 kilómetros cuadrados en 1985. La relación entre la cantidad (C) de bosque en kilómetros cuadrados y los años (A) desde 1965 es aproximadamente lineal.

   a) Exprese la relación lineal mediante una función, justificando la elección de dominio y codominio según el contexto.

   b) Determine el tamaño de los bosques en 1965 y en 1997.

   c) Determine desde qué año la cantidad de bosques sería menor a la décima parte de lo que había en 1985.

3. En 1990 la Comisión Internacional para Cambios en el Clima predijo que la temperatura promedio sobre la Tierra se elevaría 0.3° Celsius por década, si no se establecen limnitaciones internacionales sobre emisiones de fecto invernadero. La temperatura promedio global fue de 15° Celsius en 1970. Se ha estimado que el nivel del mar se elevará 65 centímetros si la temperatura promedio global se eleva a 19° Celsius.

   a) Establezca una función entre la temperatura promedio global y el tiempo desde 1970, especificando qúe miden sus variables y justificando dominio y codominio escogidos.

   b) Determine en qué años, de ser correctas las estimaciones, mediciones y predicciones, el nivel del mar debiera superar los 65 centímetros.

4. La rapidez de crecimiento r (en kilos por mes) de un niño relacionada con el peso actual p (en kilos) por la fórmula $r = cp(10 - p)$, donde c es una constante positiva desconocida y $0 < p < 10$. ¿A qué peso se presentará l máxima rapidez de crecimiento?

5. La cantidad de kilómetros K que cierto vehículo puede recorrer con una estanque de bencina a una velocidad de v kilómetros por hora está dado por

$$K = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \qquad \text{para } 0 < v < 100$$

Determine la velocidad a que rinde más kilómetros con un estanque, y cuantos kilómetros rinde en ese caso.

6. La entrada a una catedral tiene la forma de un arco parabólico y mide 9 metros de alto en el centro y 6 metros de ancho en la base. Hay que diseñar una reja rectangular para proteger esa entrada, y se tienen barrotes de 8 metros de alto. ¿Cual es el ancho máximo que se puede cubrir con esos barrotes, sin cortarlos? (para terminar de dar el ancho se cortarán barrotes, pero eso no importa aquí)

7. Una compañia de TV-Cable da servicio a 5000 usuarios y cobra 20 mil pesos al mes. Un estudio de mercado indica que por cada mil pesos menos en la tarifa, se sscribirían 500 clientes nuevos.

   a) Calcule la cantidad C de clientes que tendrá la empresa si cobra x miles de pesos al mes, con $0 \leq x \leq 20$.

   b) Determine la cantidad G (en miles de pesos) que gana la empresa al tener C clientes y cobrar x miles de pesos al mes.

   c) Determine cuánto debe cobrar (en miles de pesos) la empresa para tener el máximo ingreso mensual de dinero, cuantos clientes tendrá en ese caso, y cual es la ganancia mensual.

8. Se va a construír un jardín experimental, para lo cual se dispone de 308 metros de vallas para encerrar un área rectangular de 4080 metros cuadrados. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

9. Se quiere acolchar el piso de un gimnasio de 12 metros por 15 metros, dejando una franja uniforme sin acolchar. El presupuesto alcanza sólo para comprar 108 metros cuadrados de superficie acolchada. Calcule las dimensiones que tendrá el área acolchada.

10. Para altitudes h de hasta 10000 metros, la densidad D de la atmósfera de la Tierra (en kg/m^3) se aproxima mediante la siguiente fórmula:

$$D = 1.225 - (1.12 \times 10^{-4})h + (3.24 \times 10^{-9})h^2$$

Determine a qué altura la densidad de la atmósfera es menor a $0.74\, kg/m^3$

11. La temperatura T (en grados Celsius) a que hierve el agua está relacionada con la elevación h (en metros sobre el nivel del mar) por:

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$

cuando $95 \leq T \leq 100$. Calcule la temperatura a que hierve el agua sobre el monte Everest, que tiene alrededor de 8840 metros sobre el nivel del mar. ¿A qué alturas el agua herviría a menos de 90 grados Celsius?

12. Un fabricante produce audífonos con un costo de \$2000 cada uno, y los vende a \$5000 cada unidad con un volumen de venta de 4000 audífonos mensuales. El fabricante considera que cada variación de \$1000 en el precio de venta tendrá un efecto de variar el volumen de venta en 400 audífonos mensuales, de modo que un aumento de precio disminuye el volumen de venta y viceversa.

    a) Exprese el volumen de unidades vendidas respecto del precio de venta mediante una función, justificando la elección de la regla de asignación, del dominio y del codominio, considerando que el dominio sea un intervalo de números reales.

    Decida si la función obtenida es de un tipo conocido y, de serlo, descríbala.

    b) Exprese la utilidad del fabricante respecto del precio de venta mediante una función, justificando la elección de la regla de asignación, del dominio y del codominio, considerando que el dominio sea un intervalo de números reales.

    Decida si la función obtenida es de un tipo conocido y, de serlo, descríbala.

    c) ¿Para qué precios la utilidad es mayor que \$1000000?

    d) ¿Para qué precios la utilidad es menor que \$1000000?

    e) ¿Cual es el recorrido de la función de utilidad? Explique.

    f) ¿La utilidad puede ser tan alta como el fabricante quiera?

13. Se está diseñando un parque de juegos rectangular, cercado, con un área de 14000 metros cuadrados.

    a) Exprese la longitud total de la cerca respecto de uno de los lados del rectángulo como una función, justificando dominio, codominio y regla según el contexto.

    b) Decida si la función es de un tipo conocido y en tal caso descríbala.

    c) Utilice algún software de graficación para obtener su gráfica (por ejemplo, Geogebra).

    d) ¿Hay valores máximos o mínimos?

6. Límites y Continuidad

6.1. Nociones intuitivas

Habitualmente se presenta la noción de límite antes que la de continuidad, pese a que la experiencia previa del estudiante es con funciones continuas. Así, se acostumbra a decir que un número L es el límite de una función f hacia un valor c si los valores $f(x)$ se aproximan a L cuando x se aproxima a c. Eso es demasiado informal para ser útil, por lo que conectaremos con curvas y gráficas:

Las gráficas de rectas y cónicas son curvas continuas, considerando por separado las ramas de hipérbolas, bajo la interpretación de que un punto que recorre la curva puede hacerlo sin interrupciones. Una metáfora útil es pensar que una curva es continua cuando es un cable eléctrico que conduce la electricidad entre cualquier par de puntos de la curva.

Otra metáfora, más útil para definir límite de una función, es considerar que una curva es continua en uno de sus puntos si éste es concordante con los puntos circundantes de la curva; la curva es continua entonces si es continua en cada uno de sus puntos. Para gráficas de funciones, el punto y sus circundantes se describen mediante sus primeras coordenadas.

La noción de límite de una función f hacia $c \in \mathbb{R}$ (en horizontal) corresponde a la existencia de un valor $L \in \mathbb{R}$ (en vertical) de modo que el punto (c, L) es concordante con los puntos circundantes de la gráfica de f, es decir, que la curva sea continua en (c, L).

Precisando un poco más, un número L es el límite de una función f hacia un valor c cuando el punto (c, L) es concordante con los puntos $(x, f(x))$ para x arbitrariamente cercano a c.

Observación 6.1.

1. *Denotamos por* $L = \lim\limits_{x \to c} f(x)$ *a la afirmación de que* L *es el límite de* f *hacia* c.
2. *La noción de "puntos de la gráfica circundantes" se puede considerar respecto de la recta vertical* $x = c$.
3. *Para que* $L = \lim\limits_{x \to c} f(x)$*, no importa si* $c \in \mathrm{dom}(f)$ *o no, sólo importa que* c *no esté aislado de* $\mathrm{dom}(f)$*, ya que, si estuviera asilado, no habría gráfica de* f *circundante a* $x = c$ *(a esa recta vertical).*
4. *De existir el límite, debe ser único para que tenga sentido la noción de ser concordante con los puntos circundantes.*
5. *La definición matemáticamente correcta de límite la veremos más adelante dentro del capítulo de límites.*
6. *Una función* f *es continua en* c *cuando el punto* $(c, f(c))$ *es concordante con los puntos circundantes, es decir, cuando* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$
7. *Leemos "x tiende a c" para* $x \to c$*. De hecho, se dice que* $L = \lim\limits_{x \to c} f(x) =$ *ssi* $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* c.

6.2. Propiedades básicas de límites y continuidad

Proposición 6.1. *1. La función que a cada $x \in \mathbb{R}$ asigna el mismo valor x es la función identidad, su gráfica es la recta de ecuación $y = x$, y es una función continua en cada $c \in \mathbb{R}$, es decir, $\lim_{x\to c} x = c$*

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es constante (al menos no varía con x), entonces la función constante que a cada $x \in \mathbb{R}$ asigna el mismo valor α, es una función cuya gráfica es la recta horizontal $y = \alpha$, es continua en cada $c \in \mathbb{R}$, y por tanto $\lim_{x\to c} \alpha = \alpha$

3. Sean f y g funciones y sea c un punto no aislado de $(\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g))$ tales que existen $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$, entonces:

a) $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$
Si f y g son continuas en c, entonces $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = f(c) + g(c)$, por lo que la función $f + g$ es continua donde lo sean simultáneamente f y g.

b) *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es constante (no varía con x) entonces $\lim_{x\to c} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$*
Si f es continua en c, entonces $\lim_{x\to c} \alpha f(x) = \alpha f(c)$, por lo que la función αf es continua donde lo sea f.

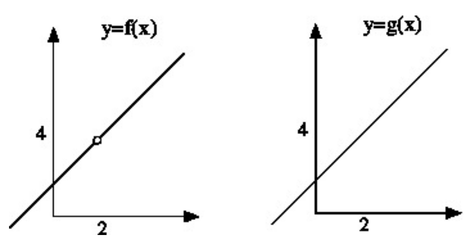
c) $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$
Si f y g son continuas en c, entonces $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = f(c) \cdot g(c)$, por lo que la función $f \cdot g$ es continua donde lo sean simultáneamente f y g.

d) *Si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$*

Si f y g son continuas en c y $g(c) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(c)}{g(c)}$, por lo que la función $\dfrac{f}{g}$ es continua donde lo sean simultáneamente f y g y $g \neq 0$.

4. Si $c > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$, por lo que la función raíz enésima es continua en $\mathbb{R}^+$.

Ejemplo 6.1. *Sean $f\colon (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x + 2$.*



Entonces

1. *La función g es continua en $\mathbb{R}$, al ser suma de funciones continuas, por lo que* $\lim\limits_{x\to 2} x+2 = 2+2=4$
2. *Aunque $f(2)$ no existe, 2 no está aislado de $dom(f)$, es decir, $f(x)$ existe para valores cercanos pero distintos de 2.*
3. *Como $f(x)=g(x)$ salvo en 2, cuando x tiende a 2 es claro que $f(x)$ tiende a $g(2)$, es decir, a 4.*
4. *Es decir,* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$
5. *De todos modos, lo anterior se puede obtener mediante operatoria cuidadosa:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\\ &\left(\textit{Como } x \textit{ tiende a } 2 \textit{ pero no es } 2, \textit{ se cumple } \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=(x+2)\right)\\ &= \lim_{x\to 2}(x+2)=4\end{aligned}$$

Ejemplo 6.2. 1. $\lim\limits_{x\to 3} 5x^2-2x+4 = 5\left(\lim\limits_{x\to 3} x\right)^2 - 2\left(\lim\limits_{x\to 3} x\right) + \lim\limits_{x\to 3} 4 = 5(3)^2-2(3)+4=43$

2. $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim\limits_{x\to -2} x^3+2x^2-1}{\lim\limits_{x\to -2} 5-3x}\ (\textit{ denominador no da cero})$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to -2} x\right)^3 + 2\lim\limits_{x\to -2} x^2 - \lim\limits_{x\to -2} 1}{\lim\limits_{x\to -2} 5 - 3\lim\limits_{x\to -2}} = \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

3.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\left(\textit{ cociente de limites no aplica, queda } 0/0 \therefore \textit{ Racionalizamos }\right)\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}\ (\textit{ hacia 1, no en 1})\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & \quad \left(\text{\scriptsize\textit{cociente de limites no aplica, queda } 0/0 \therefore \textit{ Racionalizamos}}\right) = \\ &= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \\ &= \lim_{x\to 4}\sqrt{x}+2 = 4\end{aligned}$$

Observación 6.2. *Muchas de las funciones que trataremos en este curso presentan puntos de discontinuidad, es decir, no son continuas en un punto, por alguna de las razones siguientes:*

1. *el punto (su primera coordenada) no está en el dominio;*
2. *el punto (su primera coordenada) está en el dominio y el límite hacia él existe, pero no coincide con el valor de la función en él;*
3. *el límite hacia el punto no existe.*

Las primeras dos condiciones son fáciles de verificar, al menos si podemos calcular los límites, como en el caso de la función f del Ejemplo 6.1.

La tercera condición depende de poder mostrar que un límite determinado no existe. Aunque hay casos complicados, por ahora veremos el caso más simple, que involucra límites laterales.

Definición 6.1 (Límites laterales)**.** *Sea c un valor no aislado del dominio de una función f. Definimos:*

1. *Límite de f hacia c por izquierda, denotado $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$, al considerar $x \to c$ pero únicamente por valores $x < c$, es decir, a izquierda de la recta vertical $x = c$.*
2. *Límite de f hacia c por derecha, denotado $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, al considerar $x \to c$ pero únicamente por valores $x > c$, es decir, a derecha de la recta vertical $x = c$.*

Proposición 6.2. *Sea c un valor no aislado del dominio de una función f. Entonces:*

1. *$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe ssi $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ existen y son iguales;*
2. *En tal caso,*
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

Ejemplo 6.3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por* $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 7-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

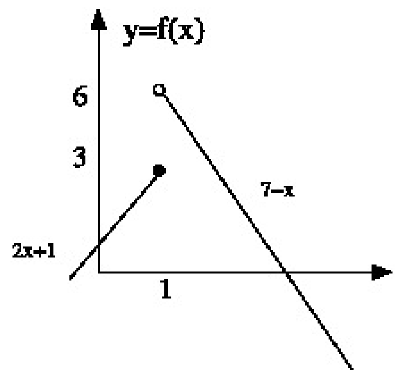


Figura 3: Gráfica figura 6.3

Entonces

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \underset{(f\ es\ 2x+1\ a\ izquierda\ de\ 1)}{\lim_{x\to 1^-} 2x+1} = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \underset{(f\ es\ 7-x\ a\ derecha\ de\ 1)}{\lim_{x\to 1^+} 7-x} = 6$$

Como los límites laterales no coinciden, entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe y por lo tanto f no es continua en 1. Ver Figura 3

Observación 6.3. *En caso de que una función tenga en su dominio un borde de intervalo, abierto o cerrado, su límite en ese punto se calcula considerando sólo el límite lateral que tenga sentido.*

Ejemplo 6.4. *La función raíz cuadrada tiene dominio $[0, \infty[$, codominio $\mathbb{R}$, y regla de asignación dada por el arcaísmo visual $\sqrt{x}$, es decir, a cada $x \geq 0$ le asigna $\sqrt{x}$.*

Como su dominio presenta un borde en 0, ocurre que $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ carece de sentido, dado que a izquierda de 0 no hay valores del dominio ni gráfica a izquierda del eje vertical.

Sin embargo $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, ya que el límite por derecha existe y no es contradicho por el límite por izquierda.

Proposición 6.3 (Propiedades adicionales de límites)**.** *Se cumplen:*

1. *(Teorema del Sandwich)*
   Si c pertenece a un intervalo abierto I en el cual se cumple $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$, salvo tal vez en el mismo c, y se tiene $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$

2. *(Nula por Acotada)*
   Si existe $M > 0$ *tal que* $|f(x)| < M$ *para todo* x *en un intervalo abierto que contiene a* c *(es decir,* f *es acotada en torno a* c*), y* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$*, entonces*

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$$

3. *(Cambio de variable)*

4. *(Límite de una composición de funciones)*
   Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = b$ *y* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = L$ *y, o bien en un intervalo abierto* I *que contenga a* c *se cumple* $\forall x \in I(x \neq a \to f(x) \neq b)$*, o bien* $g(b) = L$*, entonces*

$$\lim_{x\to c}(g \circ f)(x) = L$$

5. *(Caso particular: límite de la composición de una función continua con otra función)*
   Si g *es continua en* L *y se cumple* $L = \lim\limits_{x\to c} f(x)$*, entonces*

$$\lim_{x\to c} g\left(f(x)\right) = g(L)$$

Ejemplo 6.5. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{3x+5} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)} = \sqrt{3\cdot 2+5} = \sqrt{11}$ *por composición de funciones y continuidad. Verifique los detalles.*

6.3. Guía 6 Mat I

Límites y continuidad de funciones

1. Use propiedades de los límites laterales, para determinar los límites (si existen):

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(3-\sqrt{x})$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-}\frac{x-5}{2|x-5|}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{2|x-5|}$

   d) $\displaystyle\lim_{t\to(-4)^-}\frac{4+t}{\sqrt{(4+t)^2}}$

   e) $\displaystyle\lim_{t\to -3^+}\sqrt{9-t^2}$

   f) $\displaystyle\lim_{x\to 7^-}\frac{7-x}{|x-7|}$

2. Estudie la continuidad de las siguientes funciones :

   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

   b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

   c) $f:[0,\infty[\,\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{x} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

   d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x\neq -2\\ 0 & \text{si } x=-2\end{cases}$

   e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x-|x|$

   f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\dfrac{1}{x}$

   g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

   h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt{x^3+1}$

   i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+1}$

   j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|+3}{x} & \text{si } x<0\\ x+5 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

3. Considere el conjunto de funciones cuyos integrantes son, para cada $a\in\mathbb{R}$:

$$f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{con } f_a(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si } x\leq 2\\ ax^2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

¿Cuáles funciones del conjunto son continuas en $\mathbb{R}$?

4. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ de modo que las funciones de la forma

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{con}\ f_{a,b}(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3 \\ -2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sean continuas en $\mathbb{R}$

5. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

f) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

k) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

m) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

ñ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

o) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

p) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

r) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m-1}{x-1}$

s) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

t) $\lim\limits_{u \to -2} \dfrac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$

u) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

7. Derivadas

Definición 7.1. *Se dice que f es* derivable *en $c \in \mathrm{dom}(f)$ ssi existe el límite* $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

En tal caso ese límite se denota $f'(c)$, o también $\dfrac{df}{dx}(c)$, y se llama derivada *de f en c.*

Dada una función f, sea $f' : \{x \in dom(f) \mid f \text{ derivable en } x\} \to \mathbb{R}$ la función que a cada x donde f es derivable le asigna $f'(x)$.

Observación 7.1. *Por cambio de variable, si f es derivable en c, su derivada se puede calcular como: $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$, que se obtiene mediante cambio de variable.*

7.1. Interpretación geométrica de la derivada

Geométricamente, la recta tangente a una curva plana en un punto de ella es la recta, que contiene al punto, que mejor aproxima a la curva en las cercanías del punto (al punto se le menciona como "punto de tangencia"). Aunque en la circunferencia se puede caracterizar a la recta tangente como la que "corta a la circunferencia en un único punto", ello no es cierto en general, por lo que se requiere de una caracterización más sofisticada.

Sea f una función de la que se espera determinar su recta tangente para un punto de tangencia $\big(c, f(c)\big)$. Si consideramos todas las rectas que pasan por ese punto, sólo una de ellas será la recta tangente, si es que existe. Consideramos las rectas que pasan por el punto de tangencia y por otro punto de la gráfica, de modo que al acercar el segundo punto hacia el punto de tangencia, las rectas obtenidas tiendan a la recta tangente. Pero como todas esas rectas pasan por el punto de tangencia, lo único que necesitamos es determinar cómo varían las pendientes, obteniendo la pendiente de la recta tangente.

Para $x \neq c$ se considera la recta que pasa por los puntos $\big(c, f(c)\big)$ y por $(x, f(x))$. El signo de $x - c$ indica si el segundo punto está a derecha $(x - c > 0)$ o a izquierda $(x - c < 0)$ del punto de tangencia, y se considera que x está suficientemente cerca de c como para que lo importante sea lo que ocurre en las cercanías del punto de tangencia. La pendiente de tal recta es $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, y en caso de existir el límite cuando $h \to 0$, tal límite, la derivada de f en c, será la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$, es decir, la recta que pasa por $(c, f(c))$ y que representa la mejor aproximación rectilínea a la gráfica de f cerca del punto de tangencia $(c, f(c))$.

Definición 7.2. *Si f es una función derivable en $c \in dom(f)$, definimos la recta tangente al gráfico de f en el punto $\big(c,\ f(c)\big)$ como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es $f'(c)$, es decir, $\dfrac{y - f(c)}{x - c} = f'(c)$.*

7.2. Propiedades y cálculo de derivadas

Proposición 7.1. *Sea f función derivable en $c \in dom(f)$. Entonces f es continua en c.*

Demostración. Asumiendo f derivable en c, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}\left(f(c) + (f(x) - f(c))\right) = f(c) + \lim_{x\to c}\left(f(x) - f(c)\right) \\
&= f(c) + \lim_{x\to c}(x-c)\frac{(f(x) - f(c))}{x-c} \\
&= f(c) + \lim_{x\to c}(x-c)\lim_{x\to c}\frac{(f(x) - f(c))}{x-c} = f(c) + 0\cdot f'(c) \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

obteniéndose que f es continua en c. □

Las siguientes propiedades establecen y justifican la derivabilidad de varias funciones básicas, a la vez que indican cual es la función derivada en cada caso. Se asume que los dominios de las funciones son los más amplios en $\mathbb{R}$.

Proposición 7.2. *Sea f función constante. Entonces f es derivable en todo su dominio y su derivada es* 0 *siempre.*

Se denota operacionalmente $(\alpha)' = 0$

Demostración. Suponga que f asigna el valor constante α a todo número real. Entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{\alpha - \alpha}{x-c} = \lim_{x\to c} 0 = 0$$

□

Proposición 7.3. *Para $n \in \mathbb{N}$, la función potencia n-ésima, es decir, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^n$, es derivable en todo número real con derivada $f'(c) = nc^{n-1}$ para cada real c.*

Se denota operacionalmente $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{x^n - c^n}{x-c}$$

(por productos notables)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to c}\left(x^{n-1} + x^{n-2}c + x^{n-3}c^2 + \cdots xc^{n-2} + c^{n-1}\right) \\
&= nc^{n-1}
\end{aligned}$$

□

Proposición 7.4. *Sean f y g funciones derivables en c. Entonces*

1. *Para cada constante* $\lambda \in R$ *la función* λf *es derivable en* c *y cumple* $\big(\lambda f\big)'(c) = \lambda f'(c)$.
2. *La función suma* $f+g$ *es derivable en* c *y cumple* $(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$. *Lo mismo ocurre con la función* $f-g$.
3. *La función producto* $f \cdot g$ *es derivable en* c *y cumple* $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
4. *Si* $g(c) \neq 0$, *entonces la función cociente* $\dfrac{f}{g}$ *es derivable en* c *y cumple*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

Demostración. 1. $\big(\lambda f\big)'(c) = \lim_{x\to c} \dfrac{\lambda f(x) - \lambda f(c)}{x-c} = \lambda \lim_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lambda f'(c)$

2.

$$\begin{aligned}(f+g)'(c) =& \lim_{x\to c} \frac{\big(f(x)+g(x)\big) - \big(f(c)+g(c)\big)}{x-c} \\ =& \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = f'(c)+g'(c)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(fg)'(c) =& \lim_{x\to c} \frac{\big(f(x)\cdot g(x)\big) - \big(f(c)\cdot g(c)\big)}{x-c} \\ =& \lim_{x\to c} \frac{f(x)\cdot g(x) - \big(f(c)\cdot g(x) - f(c)\cdot g(x)\big) - f(c)\cdot g(c)}{x-c} \\ =& \lim_{x\to c} \frac{\big(f(x)-f(c)\big)\cdot g(x) + f(c)\cdot\big(g(x)-g(c)\big)}{x-c} \\ =& \left(\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\cdot\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) + f(c)\left(\lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right) \\ =& f'(c)g(c) + f(c)g'(c)\end{aligned}$$

tomando en cuenta que como g es derivable en c, entonces es continua en c y por tanto $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$.

4. Ejercicio.

□

Proposición 7.5 (Regla de la cadena o derivada de una composición)**.** *Sean* f *y* g *tales que* $g(x) \in \mathrm{dom}(f)$ *para todo* $x \in]a,b[$. *Si para* $x \in]a,b[$ *se cumple que* g *es derivable en* x *y* f *es derivable en* $y = g(x)$, *entonces* $f \circ g$ *es derivable en* x *y se cumple*

$$(f\circ g)'(x) = f'\left(g(c)\right)\cdot g'(x)$$

Ejemplo 7.1. *Se tiene que, como* $(x^8)' = 8 \cdot x^7$ *(como función "xterna" f) y que* $(5x^2 + 3x + 1)' = 10x + 3$ *(como función "interna" g), entonces*

$$\left((5x^2 + 3x + 1)^8\right)' = \left(8 \cdot (5x^2 + 3x + 1)^7\right) \cdot (10x + 3)$$

Proposición 7.6. *Para $n \in \mathbb{Z}$ fijo y $x \neq 0$ se cumple* $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Demostración. Ya sabemos que $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big((x^n)' = nx^{n-1}\big)$. Sea $n \in \mathbb{Z}^-$. Asignando $p = -n$ se cumplen $p \in \mathbb{N}$ y $n = -p$. Pero

$$\begin{aligned}(x^n)' =&(x^{-p})' = \left(\frac{1}{x^p}\right)' = -1\frac{\left(x^p\right)'}{(x^p)^2} = -1\frac{px^{p-1}}{x^{2p}} = -px^{p-1-2p}\\ =&-px^{-p-1} = nx^{n-1}\end{aligned}$$

lo que prueba lo pedido. □

Proposición 7.7. *Para $n \in \mathbb{Z}$ fijo y $x > 0$ se cumple* $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

Demostración. Note que, por Regla de la cadena entre la función potencia n-ésima y la función raíz n-ésima:

$$1 = (x)' = \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)' = n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$$

y despejando, se obtiene $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ □

Proposición 7.8. *Para $m, n \in \mathbb{Z}$ fijos, con $m \neq 0$, y $x > 0$ se cumple* $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

Demostración. Sin pérdida de generalidad sea $n > 0$. Como $\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, aplicando Regla de la Cadena y las propiedades previas, se tiene

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' &= \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)' = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = m\left(x^{\frac{m-1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\left(x^{\frac{m-1}{n}}\right) \cdot \left(x^{\frac{1-n}{n}}\right)\\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m-1+1-n}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.2. *Calcule* $\left(\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^{10}\right)'$.

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}\left(\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^{10}\right)' &= 10\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^9 \cdot \left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)'\\ &= 10\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^9 \cdot \left(5 + \frac{4}{3}(3x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (3x-1)'\right)\\ &= 10\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^9 \cdot \left(5 + 4(3x-1)^{\frac{1}{3}}\right)\end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.3. *Calcule* $\left(5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}\right)'$.

<u>**Solución**</u>:

$$\left(5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}\right)' = \left(5x^{\frac{2}{3}}\right)' - \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}x^{\frac{-1}{3}}(2-x) = \frac{5(2-x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$\square$

7.3. Antiderivadas e integrales elementales

Como derivadas lo basamos, por ahora, en operatoria, entonces integrales también lo veremos por operatoria en este curso, incorporándolo al contexto completo de funciones más adelante.

Definición 7.3. *Se dice que g es una antiderivada (o primitiva) de f si $g' = f$.*

Ejemplo 7.4. *Como $(x^2)' = 2x$, entonces x^2 es una primitiva de $2x$. Pero como $(x^2+510)' = 2x + 0 = 2x$, entonces también $x^2 + 510$ es primitiva de $2x$.*

Proposición 7.9. *Si g y h son primitivas de f, entonces $g - h$ es constante.*

Observación 7.2. *Por la proposición anterior, si conocemos una primitiva g para f, toda otra primitiva se escribe a partir de g como $g + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante. De hecho, valores diferentes de $C \in \mathbb{R}$ determinan primitivas diferentes de f.*

Definición 7.4 (Integral indefinida)**.** *Definimos la integral indefinida de f como el conjunto de todas sus primitivas, y se denota $\int f(x)dx$ (por ahora, dx indica la variable)*

Si g es una primitiva de f, entonces se cumple $\int f(x)\,dx = \{g(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, lo que se abrevia

$$\int f(x)\,dx = g(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Proposición 7.10. *Note que siempre se cumple* $\int g'(x)\,dx = g(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Ejemplo 7.5.

1. $\int 2x\,dx = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$, *porque* $(x^2)' = 2x$
2. $\int 6x\,dx = 3x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$, *porque* $(3x^2)' = 6x$
3. $\int (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C,\ C \in \mathbb{R}$, *porque* $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)' = x^2 + x + 1$

4. $\displaystyle\int \left(3x^{5/2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{6}{7}x^{7/2} + 2\sqrt{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$, *porque* $\displaystyle\left(\frac{6}{7}x^{7/2} + 2\sqrt{x}\right)' = 3x^{5/2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Si damos alguna condición que cumpla una primitiva, mientras se atenga al dominio de ella y de su derivada, siempre existirá una única primitiva que lo cumplirá:

Ejemplo 7.6. *Encuentre la función* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que cumple* $g'(x) = 3x^2 + 5$ *y* $g(2) = 9$.

Solución: Claramente g debe ser una primitiva de $3x^2 + 5$, así que debe ser de la forma $g(x) = x^3 + 5x + C$, porque $\displaystyle\int (3x^2 + 5)\, dx = x^3 + 5x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Pero la condición dada implica que

$$9 = g(2) = 2^3 + 5 \cdot 2 + C = 18 + C \quad \Longleftrightarrow \quad C = 9 - 18 = -9$$

de modo que la única primitiva que cumple la condición dada es $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x^3 + 5x - 9$ $\square$

7.4. Guía 7 Mat I

Derivadas por operatoria

1. Calcule las siguientes derivadas por operatoria

   a) $f(x) = \dfrac{12-2x}{3}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+8}$

   c) $f(x) = 3x^{14}$

   d) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

   e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$

   f) $f(x) = \dfrac{3x+5}{5x-3}$

   g) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

   h) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

   i) $f(x) = \sqrt{2x+5}$

   j) $f(x) = \sqrt[3]{x+x^2}$

   k) $f(x) = x^5(x+1)^{19}$

   l) $f(x) = (3-x^2)(x+11)^{12/5}$

   m) $f(x) = \sqrt{x^3+x} - x^{-3}$

   n) $f(t) = \dfrac{(t+7)\sqrt[9]{t-8}}{t^2+4} + 3t^5$

   ñ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-1}$

   o) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x}$

   p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+x}$

   q) $f(x) = \sqrt[7]{x^{12}-5x^7+3}$

   r) $f(x) = \left(x^4 - 3\sqrt[3]{2x+5}\right)^{21}$

   s) $g(x) = (2x-1)^2 - 6\sqrt{5x}$

   t) $h(x) = \left(\sqrt{x^3+5}\right)^{\frac{5}{2}}$

   u) $l(x) = 2\sqrt{1+\sqrt{2x+1}}$

   v) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{(2x^3+x-6)}}$

   w) $s(x) = \dfrac{x^2+\sqrt[5]{4x^2+1}}{x^4+1}$

Integrales elementales

1. Calcule:

   a) $\displaystyle\int (2x)\,dx$

   b) $\displaystyle\int (3x^2+2x+7)\,dx$

   c) $\displaystyle\int (x^2+x+1)\,dx$

   d) $\displaystyle\int 4x^3\,dx$

   e) $\displaystyle\int 6x^2\,dx$

   f) $\displaystyle\int (2x^5-5x^3+x^2-3)\,dx$

   g) $\displaystyle\int (x-1)(x-2)\,dx$

   h) $\displaystyle\int (x-3)^2\,dx$

i) $\displaystyle\int x^{-3/5}\,dx$

j) $\displaystyle\int \left(5x^{-2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

l) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

m) $\displaystyle\int \left(x^{4/3}-5x^{-2/3}+7\sqrt{x}\right)dx$

2. Determine, en cada caso, la función f que cumple lo pedido en $\mathbb{R}$:

   a) $f'(x)=4x^2+1$ y $f(0)=3$

   b) $f'(x)=2x^2+5x-2$ y $f(0)=5$

   c) $f'(x)=5x^3-9x^2+3x-1$ y $f(3)=2$

   d) $f'(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$ y $f(9)=9$

3. Calcule:

   a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

   b) $\displaystyle\int_2^5 (x^2+3x-1)\,dx$

   c) $\displaystyle\int_{-2}^3 (5x^2-8x+9)\,dx$

   d) $\displaystyle\int_{-3}^0 (7x^3-4x^2+5x-12)\,dx$

8. Funciones Trigonometricas

El estudio de la trigonometría se hará en este curso enfocado más hacia funciones trigonométricas que a su origen histórico como razones entre lados de triángulos rectángulos, lo cual es una forma abstracta de considerar semejanza de triángulos.

Las funciones trigonométricas están involucradas en geometría, por supuesto, pero a través de la representación polar del plano su aporte va más allá de los triángulos, influyendo asimismo en los números complejos y la geometría que se apoya en ellos. Su carácter de funciones periódicas (que repiten sus valores al sumar una valor fijo a la variable) les involucra tanto en aplicaciones en movimiento armónico simple como en la ecuación del calor, en sonido y campos electromagnéticos, en modelos de poblaciones, modelos predador-presa, y en modelos de reacciones químicas, por nombrar los más directos.

En suma, la trigonometría, vista como funciones trigonométricas, abre amplios espacios en las ciencias básicas (biología, ecología, matemática, física y química).

Consideraremos las funciones trigonométricas con dominios los números reales. Para ello usaremos que cada número real t está en correspondencia uno a uno con un ángulo que mide t radianes. Para visualizar esta correspondencia usaremos una circunferencia centrada en (0,0) y de radio 1. Se la llama *circunferencia unitaria* y su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. La denotamos por $\mathtt{C}$.

8.1. Ángulos en radianes y funciones seno y coseno

En una circunferencia de centro O y radio r, la medida de un ángulo central es proporcional a la medida del arco que sustenta. Definimos entonces la medida en radianes del ángulo como el cociente $\frac{l}{r}$ donde l es la medida del arco sustentado por el ángulo. Ello permite que la medida del ángulo en radianes sea independiente del radio de la circunferencia. En particular, la medida en radianes de un ángulo central en $\mathtt{C}$ coincide con la medida del arco sustentado.

De ese modo, como un ángulo recto sustenta un arco que es la cuarta parte del perímetro de la circunferencia, su medida en radianes será $\frac{\frac{2\pi r}{4}}{r} = \frac{\pi}{2}$. Asimismo, la medida en radianes de un ángulo extendido es π, ya que sustenta un arco que es la mitad del perímetro. El valor 2π es el cociente entre el perímetro de la circunferencia y su radio (es lo que permite definir π) y mide en radianes al ángulo máximo visible, un giro completo.

Ángulos en radianes de medida mayor que 2π representan una superposición de ángulos, en que se realiza un giro completo (o más de uno) y algún ángulo más. Desde el punto de vista de arco, se trata de un arco que mide la longitud de una trayectoria superior al perímetro de la circunferencia.

Definición 8.1. *Sea $P : \mathbb{R} \to \mathtt{C}$ la función definida por:*

1. $P(0) := (1, 0)$ *(punto inicial)*

2. *Si $t \in \mathbb{R}^+$, sea $P(t)$ el punto de* C *obtenido al recorrer una longitud t desde $P(0)$, como arco en* C *, y en sentido antihorario.*

3. *Si $t \in \mathbb{R}^-$, sea $P(t)$ el punto de* C *obtenido al recorrer una longitud $|t|$ desde $P(0)$, como arco en* C *, y en sentido horario.*

Definición 8.2. *Se definen las funciones seno, denotada* sen*, y coseno, denotada* cos*, por:*

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ y } \operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ y, para cada } t \in \mathbb{R} \text{ se cumple que } P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$$

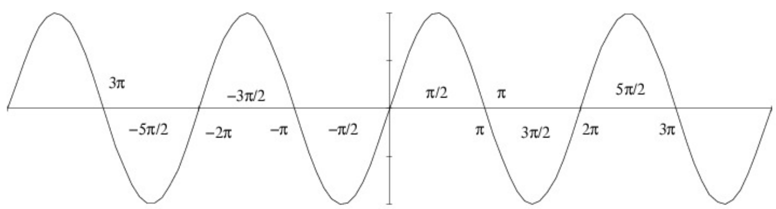


Figura 4: Función seno

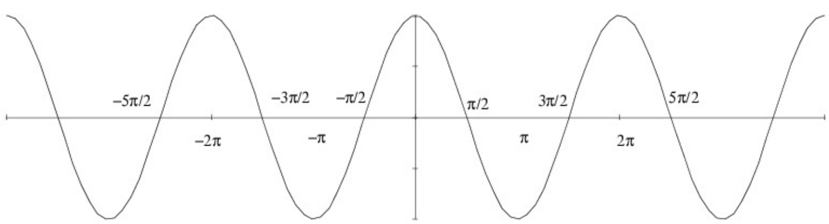


Figura 5: Función coseno

De la definición y de los cuadrantes se obtiene de inmediato:

Proposición 8.1 (Signos)**.** *Para todo $t \in R$ se cumple:*

1. $0 < t < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow (\operatorname{sen}(t) > 0 \text{ y } \cos(t) > 0)$

2. $\frac{\pi}{2} < t < \pi \Rightarrow (\operatorname{sen}(t) > 0 \text{ } y \text{ } \cos(t) < 0)$

3. $\pi < t < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow (\operatorname{sen}(t) < 0 \text{ } y \text{ } \cos(t) < 0)$

4. $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi \Rightarrow (\operatorname{sen}(t) < 0 \text{ } y \text{ } \cos(t) > 0)$

Proposición 8.2. *1. (Identidad Pitagórica) Para todo* $t \in \mathbb{R}$ $\left(\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1\right)$, *donde* $\cos^k(t)$ *abrevia a* $(\cos(t))^k$, *y lo mismo para seno.*

2. *Para todo* $t \in \mathbb{R}$ $|\operatorname{sen}(t)| \leq 1$ *y* $|\cos(t)| \leq 1$.

3. $\cos(0) = 1$ *y* $\operatorname{sen}(0) = 0$.

4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *y* $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

5. $\cos(\pi) = -1$ *y* $\operatorname{sen}(\pi) = 0$.

6. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ *y* $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

7. $\cos(2\pi) = 1$ *y* $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$.

Demostración. Las propiedades 1 y 2 son consecuencia directa de que $P(t) \in \mathtt{C}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para probar 3, note primero que por definición $P(0) = (\cos(0), \operatorname{sen}(0))$, y como $P(0) = (1, 0)$, se obtienen $\cos(0) = 1$ y $\operatorname{sen}(0) = 0$.

Para probar 4, note que por definición $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, y como $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$, se obtienen $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Para probar 5, de $P(\pi) = (\cos(\pi), \operatorname{sen}(\pi))$ y $P(\pi) = (-1, 0)$ se obtienen $\cos(\pi) = -1$ y $\operatorname{sen}(\pi) = 0$.

Para probar 6, de $P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ y $P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$ se obtiene que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Para probar 7, de $P(2\pi) = (\cos(2\pi), \operatorname{sen}(2\pi))$ y $P(2\pi) = (1, 0)$ se obtienen $\cos(2\pi) = 1$ y $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$. $\square$

Ejemplo 8.1. *Pruebe que* $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>Solución:</u> Dibuje $B = P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ en la circunferencia unitaria. Por B trace una paralela al eje Y que corta en C al eje X. El triángulo OCB es isósceles, donde $O = (0, 0)$ el centro de la circunferencia. Luego $OC = CB$, es decir, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Usando la identidad Pitagórica $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, se tiene que $2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, luego, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pues el ángulo que mide $\dfrac{\pi}{4}$ radianes está en el primer cuadrante. Por lo tanto, $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

Teorema 8.1 (Reducción al primer cuadrante)**.** *Toda imagen de un número real bajo las funciones seno y coseno puede expresarse como la imagen, bajo la misma función y salvo el signo, de un ángulo del primer cuadrante, esto es, de un número real en* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Simbólicamente: Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ *existe* $\beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *que cumple* $|\cos(\alpha)| = \cos(\beta)$ *y* $|\operatorname{sen}(\alpha)| = \operatorname{sen}(\beta)$

Proposición 8.3.

1. *Para todo* $x \in \mathbb{R}\,(\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ *y* $\cos(-x) = \cos(x))$
2. *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}\,(\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y))$
3. *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}\,(\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y))$
4. *Para todo* $y \in \mathbb{R}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{sen}(y)\ \text{y}\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \cos(y)\right)$
5. *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}\,(\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y))$
6. *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}\,(\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x) cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y))$
7. *Para todo* $x \in \mathbb{R}\,(\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x))$
8. *Para todo* $x \in \mathbb{R}\,\left(\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\right)$

Demostración. Las afirmaciones 1 y 2 se demuestran en clases, y a partir de ellas se deducen las demás afirmaciones; dedúzcalas. $\square$

Ejercicio 8.1. *Pruebe que*

1. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$
2. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. *Para todo* $y \in \mathbb{R}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{sen}(y)\ \text{y}\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \cos(y)\right)$
4. *Para todo* $y \in \mathbb{R}\,(\cos(\pi - y) = -\cos(y)$ *y* $\operatorname{sen}(\pi - y) = \operatorname{sen}(y))$
5. *Para todo* $y \in \mathbb{R}\,(\cos(\pi + y) = -\cos(y)$ *y* $\operatorname{sen}(\pi + y) = -\operatorname{sen}(y))$

Teorema 8.2 (Periodicidad)**.** *Para todos* $x \in \mathbb{R}$ *y* $k \in \mathbb{Z}$ *se cumplen* $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ *y* $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x)$

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned}\cos(x+2k\pi) &= \cos(x)\cos(2k\pi) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2k\pi)\\ \operatorname{sen}(x+2k\pi) &= \cos(x)\operatorname{sen}(2k\pi) + \operatorname{sen}(x)\cos(2k\pi)\end{aligned}$$

Pero $P(2k\pi) = P(0) = (1,0)$ dado que $2k\pi$ es $|k|$ veces el perímetro de la circunferencia unitaria `C` , por lo cual

$$\begin{aligned}\cos(x+2k\pi) &= \cos(x)\cdot 1 - \operatorname{sen}(x)\cdot 0 = \cos(x)\\ \operatorname{sen}(x+2k\pi) &= \cos(x)\cdot 0 + \operatorname{sen}(x)\cdot 1 = \operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

$\square$

8.2. Límites, derivadas e integrales de funciones trigonométricas

Proposición 8.4. *Las funciones seno y coseno son continuas en su dominio.*

Proposición 8.5. *1.* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1$

2. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1-\cos(\alpha)}{\alpha} = 0$

Proposición 8.6 (Derivadas de seno y coseno)**.** *1. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple* $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$

2. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

Demostración. 1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{\operatorname{sen}(z)-\operatorname{sen}(x)}{z-x} \underset{\left(\substack{y = z - x\\ \therefore\, z\to x \Rightarrow y\to 0}\right)}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x)}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)+\cos(x)\operatorname{sen}(y)-\operatorname{sen}(x)}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\left(-\operatorname{sen}(x)\left(\frac{1-\cos(y)}{y}\right) + \cos(x)\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right)\\ &= -\operatorname{sen}(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \operatorname{sen}'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 8.2. *Calcule* $\left(\cos^2\left(\sqrt{x}+5x^4\right)\right)'$.

<u>**Solución**</u>:

$$\begin{aligned}\left(\cos^2\left(\sqrt{x}+5x^4\right)\right)' &= 2\cos\left(\sqrt{x}+5x^4\right)\cdot\left(\cos\left(\sqrt{x}+5x^4\right)\right)'\\ &= 2\cos\left(\sqrt{x}+5x^4\right)\cdot\left(-\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}+5x^4\right)\right)\cdot\left(\sqrt{x}+5x^4\right)'\\ &= -2\cos\left(\sqrt{x}+5x^4\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}+5x^4\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+20x^3\right)\end{aligned}$$

□

Proposición 8.7. *1.* $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$

8.3. Más funciones trigonométricas

Definición 8.3 (Tangente, cotangente, secante y cosecante)**.** *1. Definimos la función* tangente *por*

$$\tan:\left(\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \mid\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right)\to\mathbb{R}\ \textit{dada por}\ \tan(x):=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

2. Definimos la función secante *por*

$$\sec:\left(\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \mid\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right)\to\mathbb{R}\ \textit{dada por}\ \sec(x):=\frac{1}{cos(x)}$$

3. Definimos la función cosecante *por*

$$\operatorname{cosec}:\left(\mathbb{R}-\left\{k\pi\ \mid\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right)\to\mathbb{R}\ \textit{dada por}\ \operatorname{cosec}(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

4. Definimos la función cotangente *por*

$$\cot:\left(\mathbb{R}-\left\{k\pi\ \mid\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right)\to\mathbb{R}\ \textit{dada por}\ \cot(x)=\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Note que las definiciones son correctas, debido a que $\{x\in\mathbb{R}\mid\cos(x)=0\}=\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ y a que $\{x\in\mathbb{R}\mid\operatorname{sen}(x)=0\}=\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$

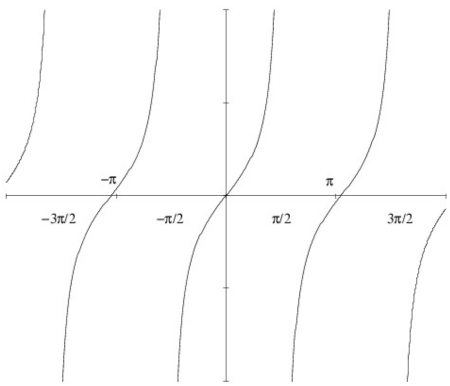


Figura 6: Gráfica de tangente

Proposición 8.8.

$$\begin{array}{ll} rec(\cos) = [-1,1] & rec(\text{sen}) = [-1,1] \\ rec(\tan) = \mathbb{R} & rec(\sec) =]-\infty,-1] \cup [1,\infty[\\ rec(\cot) = \mathbb{R} & rec(\text{cosec}) =]-\infty,-1] \cup [1,\infty[\end{array}$$

Proposición 8.9. *Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas y derivables en sus dominios, y se cumple:*

1. $\tan'(x) = \sec^2(x)$
2. $\sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$

Ejercicio 8.2. *Deduzca las derivadas de cotangente y cosecante.*

8.4. Guía 8 Mat I

1. Recuerde que la Identidad Pitagórica dice: Para todo $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$, donde $\cos^k(t)$ abrevia a $(\cos(t))^k$, y lo mismo para seno. Calcule:

   a) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$
   Resp.: 0

   b) $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right)$
   Resp.: -1

   c) $\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right)$
   Resp.: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

   d) $\cos\left(\frac{47\pi}{3}\right)$
   Resp.: $\frac{1}{2}$

   e) $\cos\left(\frac{-56\pi}{3}\right)$
   Resp.: $-\frac{1}{2}$

   f) $\cos\left(\frac{-126\pi}{3}\right)$
   Resp.: 1

   g) Si $0 < t < \frac{\pi}{2}$ y $\cos(t) = \frac{3}{5}$, calcule $\operatorname{sen}(t)$.
   Resp.: $\operatorname{sen}(t) = \frac{4}{5}$

   h) Si $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ y $\operatorname{sen}(t) = \frac{3}{5}$, calcule $\cos(t)$.
   Resp.: $\cos(t) = -\frac{4}{5}$

   i) Si $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$ y $\cos(t) = -\frac{3}{5}$, calcule $\operatorname{sen}(t)$.
   Resp.: $\operatorname{sen}(t) = -\frac{4}{5}$

   j) Si $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ y $\operatorname{sen}(t) = -\frac{3}{5}$, calcule $\cos(t)$.
   Resp.: $\cos(t) = \frac{4}{5}$

   k) Si $5\pi < t < \frac{11\pi}{2}$ y $\cos(t) = -\frac{5}{11}$, calcule $\operatorname{sen}(t)$.
   Resp.: $\operatorname{sen}(t) = -\frac{4\sqrt{6}}{11}$

2. Pruebe que:

   a) $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$

   b) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$ y $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

   c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x)$

3. Pruebe que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ y que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Simplifique, para $x, y \in \mathbb{R}$ genéricos

   a) $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)$
   b) $\cos(x+y) - \cos(x-y)$
   c) $(\operatorname{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y))^2 + (\cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y))^2$

5. Encuentre en cada caso los valores de $\operatorname{sen}(x/2)$, $\cos(x/2)$, $\tan(x/2)$:

   a) $\operatorname{sen}(x) = 5/13$ y $\pi/2 \leq x \leq \pi$.
   b) $\cos(x) = 3/7$ y $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$

6. Calcule las derivadas de las siguientes funciones respecto de su variable:

   a) $f(x) = x\cos(x)$
   b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^3 + x}$
   c) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$
   d) $f(x) = \operatorname{sen}(x + x^2)$
   e) $f(x) = \dfrac{x}{\cos(x)}$
   f) $f(x) = \big(\operatorname{sen}(x)\big)^2$
   g) $f(x) = \dfrac{x\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$
   h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\tan(x)}$
   i) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x}$
   j) $f(t) = \dfrac{t\operatorname{sen}(t)}{t^2} + 3t^5$
   k) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}$
   l) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x}$
   m) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{2x - \operatorname{sen}(x)}$

7. Calcule las siguientes primitivas:

   a) $\displaystyle\int (3\cos(x))\ dx$
   b) $\displaystyle\int (2\operatorname{sen}(x) + 5\cos(x))\ dx$
   c) $\displaystyle\int \big(x^2 + 7\cos(x)\big)\ dx$
   d) $\displaystyle\int \big(\sqrt{x} + \operatorname{sen}(x)\big)\ dx$
   e) $\displaystyle\int \big(3\cos^2(x) + 3\operatorname{sen}^2(x)\big)\ dx$
   f) $\displaystyle\int \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\ dx$

8. Calcule los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5\operatorname{sen}(x)}{4x}$
   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{4x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\,\mathrm{sen}(3x)}{4x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(x^2)}{x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(x^2)}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(4x^2)}{5x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(5x^7)}{2x^4}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{sen}(x-1)}{x-1}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\mathrm{sen}(x-3)}{x-3}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{sen}(3x-6)}{x-2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\mathrm{sen}\,(x^2-25)}{x^2-25}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\mathrm{sen}\,(x^2-9)}{x-3}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{sen}(x-2)}{x^2-4}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(2x)}{\mathrm{sen}(5x)}$

ñ) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(3x)-\mathrm{sen}(2x)}{x}$

o) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x+\tan(x)}$

p) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

Parte II
Matemáticas II (Primavera 2018)

Guía límites trigonométricos

Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\operatorname{sen}(x)}{4x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{4x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{sen}(3x)}{4x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(4x^2\right)}{5x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(5x^7\right)}{2x^4}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3}$
10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(3x-6)}{x-2}$
11. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2-25\right)}{x^2-25}$
12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2-9\right)}{x-3}$
13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(5x)}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen}(2x)}{x}$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x+\tan(x)}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

Guía TVI y TVM

1. Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene al menos una solución real.

   a) $x^3-3x+1=0$
   b) $x^2=\sqrt{x+1}$
   c) $\cos(x)=x$
   d) $x^3+ax^2+bx+c=0$

2. Suponga que $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ es continua en $[0,2]$ y diferenciable en $]0,2[$, y que $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=1$.

   a) Muestre que existe $c_1\in(0,1)$ tal que $f'(c_1)=1$.
   b) Muestre que existe $c_2\in(1,2)$ tal que $f'(c_2)=0$.
   c) (Difícil) Muestre que existe $c\in(0,2)$ tal que $f'(c)=1/3$.

9. Aplicaciones de la derivada y la continuidad

9.1. Teoremas fundamentales de continuidad y derivadas

El estudio del crecimiento y decrecimiento de la derivada y el que haya extremos locales se fundamentan en dos propiedades fundamentales:

Proposición 9.1 (Teorema del Valor Intermedio). *Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es continua en $[a, b] \subseteq A$, con $f(a) \neq f(b)$, entonces cada valor k situado entre $f(a)$ y $f(b)$ determina al menos un valor $c \in [a, b]$ con $k = f(c)$.*

Proposición 9.2 (Existencia de extremos). *Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es continua en $[a, b] \subseteq A$, entonces existen $p, q \in [a, b]$ tales que*

$$\forall x \in [a, b]\, (f(p) \leq f(x) \leq f(q))$$

Es decir, una función continua en un intervalo cerrado alcanza máximo (en q) y mínimo (en p) al menos una vez cada uno.

Proposición 9.3 (Teorema del Valor Medio para funciones derivables). *Si una función f es derivable en un intervalo $]a, b[$ y continua en $[a, b]$ [4] entonces existe un punto $c \in \,]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Gracias al TVM se pueden justificar propiedades tales como que f crece en intervalos donde $f' > 0$, y que f decrece en intervalos donde $f' < 0$, lo que ya vimos en la Proposición (9.6), y también se obtienen otras propiedades, como por ejemplo:

Proposición 9.4.

1. *Si $f' = 0$ en un intervalo, entonces f es constante en ese intervalo.*
2. *Si $f' = g'$ en un intervalo, entonces existe una constante C tal que $f = g + C$ en ese intervalo.*

La última afirmación es la que sustenta lo que afirmamos respecto de las diversas primitivas de una función en la Definición (7.4), esto es, que cualquier par de primitivas de una función (en un intervalo) están separadas por una constante, ya que al ser primitivas de una misma función, tienen a esa fucnión como la derivada para ambas primitivas.

9.2. Optimización

El objetivo de optimizar funciones es determinar sus valores máximos y mínimos, es decir, sus extremos, y saber dónde ocurren es el dominio de la función.

Ejemplo 9.1. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada or $f(x) = 12 - 5(x - 3)^2$ tiene un máximo en su vértice $(3, 12)$, es decir, su máximo vale 12 y ocurre en $x = 3$.*

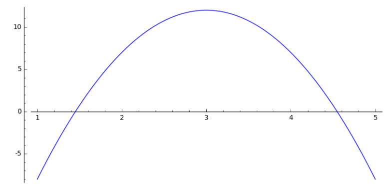


Figura 7: Gráfica del ejemplo 9.1

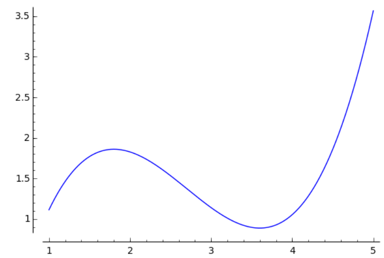


Figura 8: Una función con extremos menos simples

Sin embargo, la noción de extremo o de optimización es más compleja. En la gráfica de la Figura 8 se muestra un segmento de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{27}{10}x^2 + \frac{162}{25}x - 3$, donde notamos algunos aspectos relevantes:

- No hay un "vértice" con fórmula simple para esa cúbica; más aún, la mayoría de las funciones no tiene carcterísticas tan simples como las cuadráticas graficadas por parábolas.
- Hay un valor entre 1 y 2 donde la función sube y luego baja, es un máximo en ese subintervalo, pero hacia 5 la función adopta valores más grandes, por lo que entre 1 y 2 hay una especie de máximo, pero no es el máximo de toda la función.
- Además de esa especie de máximo, hay una especie de mínimo del que no se ve en la gráfica si es mínimo para toda la función o si es mínimo para un cierto intervalo.

Formalizamos y caracterizamos los puntos donde optimizar una función en el interior de su dominio:

Definición 9.1 (Extremos relativos o locales de una función)**.** *Sea f función y sea c punto interior de* $\mathrm{dom}(f)$.

1. f **tiene un mínimo local en** c *ssi existe intervalo abierto I con $c \in I \subseteq dom(f)$ tal que $f(c) \leq f(x) \quad$ para todo $x \in I$.*

[4]No se dice que la función no sea derivable fuera del intervalo abierto ni que no sea continua fuera dle intervalo cerrado, sólo se dice que al menos se cumplan esas condiciones para ese intervalo, podría ser derivable en $\mathbb{R}$ y se sigue cumpliendo.

2. *f* **tiene un máximo local en** *c ssi existe intervalo abierto I con $c \in I \subseteq dom(f)$ tal que $f(c) \geq f(x) \quad$ para todo $x \in I$.*

3. *Se dice que f tiene un extremo local en c ssi f tiene un máximo local en c o bien f tiene un mínimo local en c.*

En algunos textos se usa el adjetivo *relativo* en vez de "local"para estos casos.

Diremos que un extremo local de una función es además un extremo global si mantiene su condición de extremo respecto de todo el dominio de la función.

Proposición 9.5. *Si f tiene un extremo local en c y es derivable en un intervalo abierto que contiene a c, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un mínimo local en c. Como f es derivable en c, si suponemos que $f'(c) \neq 0$, entonces o bien $f'(c) > 0$ o bien $f'(c) < 0$.

1. Si $f'(c) > 0$, se tiene $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) > 0$. Como f es derivable en un intervalo abierto que contiene a c, ambos límites laterales hacia c son significativos y deben ser ambos iguales a $f'(c)$, y por tanto positivos, en particular $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) > 0$. Entonces existe un intervalo $]a, c[$ tal que $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$ para todo $x \in]a, c[$. Pero $x \in]a, c[$ implica $x - c < 0$, de donde $f(x) - f(c) = (x - c)\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$ de modo que $f(x) < f(c)$, lo que contradice el que f tiene un mínimo local en c.

2. Si $f'(c) < 0$, el argumento es análogo, considerando $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) < 0$ y un intervalo $]c, b[$ donde $f(x) < f(c)$, contradiciendo el que f tiene un mínimo local en c.

Luego la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Si suponemos que f tiene un máximo local en c, los argumentos son análogos. □

Ejemplo 9.2. *Retomando la función de la Figura 8, derivamos $f(x) = x^3 - 8 \cdot x^2 + 18.25 \cdot x - 11.25$ e igualamos a 0:*

$$0 = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{27}{10}x^2 + \frac{162}{25}x - 3\right)' = x^2 - \frac{27}{5}x + \frac{162}{25} = \left(x - \frac{9}{5}\right) \cdot \left(x - \frac{18}{5}\right)$$

que tiene soluciones $\dfrac{9}{5} = 1.8$ y $\dfrac{18}{5} = 3.6$, que son exactamente los puntos donde hay máximo local y mínimo local.

Para saber si se trata de máximo local o de mínimo localpodemos analizar el crecimineto de la función, ya que si crece a izquierda de un punto donde la derivada es 0 y decrece a su derecha, en ese punto habrá un máximo local, mientras que si decrece a izquierda del punto y crece a su derecha, entonces el punto será un mínimo local.

Dado que la derivada de una función en un punto de su dominio indica la tendencia al cambio de la función en ese punto y coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto, podemos establecer preliminarmente que:

Proposición 9.6 (Crecimiento y derivadas).

1. *Si $f' > 0$ en un intervalo J, entonces f es creciente estricta en J, es decir, $\forall a, b \in J\,(a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$, o mejor, $\forall a, b \in J\left(a \neq b \Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0\right)$*

2. *Si $f' < 0$ en un intervalo J, entonces f es decreciente estricta en J, es decir, $\forall a, b \in J\,(a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$, o mejor, $\forall a, b \in J\left(a \neq b \Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0\right)$*

Recordemos que la función valor absoluto es continua en $\mathbb{R}$ pero sólo es diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y en 0, donde no tiene derivada, tiene un mínimo.

Los puntos críticos son los valores donde buscar extremos de funciones:

Definición 9.2 (Puntos críticos). *Diremos que c es un* punto crítico *de una función f si $c \in \operatorname{dom}(f)$ y cumple que $f'(c) = 0$ o que $f'(c)$ no existe.*

Proposición 9.7 (Criterio de la primera derivada para clasificar puntos críticos). *Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es diferenciable en I excepto quizás en c, entonces:*

1. *Si $f' < 0$ en un intervalo abierto de la forma $]a, c[$ contenido en I y $f' > 0$ en un intervalo abierto de la forma $]c, b[$ contenido en I, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f.*

2. *Si $f' > 0$ en un intervalo abierto de la forma $]a, c[$ contenido en I y $f' < 0$ en un intervalo abierto de la forma $]c, b[$ contenido en I, entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f.*

3. *Si f' no cambia de signo en un intervalo abierto $]a, b[$ tal que $c \in\,]a, b[\, \subseteq I$, entonces f no tiene extremo relativo en c.*

Ejemplo 9.3. *Continuando con el caso graficado en la Figura 8, al resolver la inecuación $f'(x) > 0$ para x, tenemos que*

- $f' > 0$ *en* $]-\infty, 1.8[$ *y en* $]3.6, \infty[$
- $f' < 0$ *en* $]1.8, 3.6[$

Por lo tanto, podemos confirmar la información de la gráfica indicando que hay un máximo local en 1.8 *y un mínimo local en* 3.6.

Ejercicio 9.1. *Encuentre los intervalos de crecimiento y los extremos de la función $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$. Dibuje.*

Ejemplo 9.4. *Analizar crecimiento y extremos locales de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2(x-1)(x-3)(x-5)$*
Resp.: *Al derivar, se obtiene:*

$$f'(x) = 6x^2 - 36x + 46 = 6(x-3)^2 - 8 = \left(x - 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(x - 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

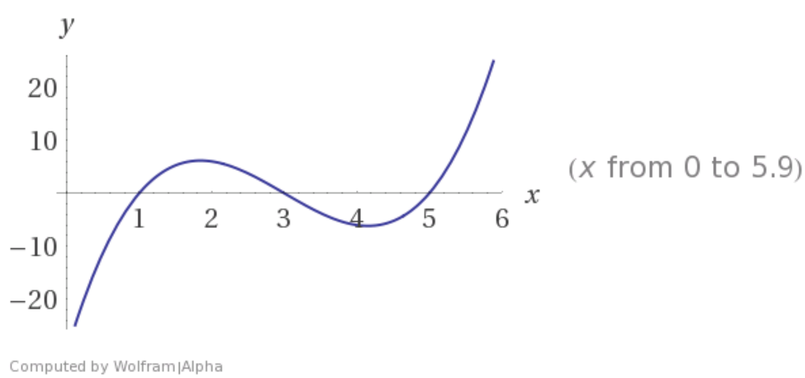
por lo cual la tabla de signos de $f'(x)$, y tabla de crecimiento de f, es

	$-\infty$		$3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$		$3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$		∞
f'	|	$+$	|	$-$	|	$+$	|
f	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$	|

por lo cual f tiene un máximo local en $3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ y un nmínimo local en $3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Es notorio además que f se hace cero en 1, 3 y 5, dado que el producto de factores es igual a cerro ssi alguno de los factores es igual a cero.

Su gráfica es



9.3. Guía 1 Mat II

1. Asegure la existencia de una solución, en el intervalo $]1,2[$, de la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$

2. Asegure la existencia de una solución de $x^3 + 3x - 2 = 0$ en $]0,1[$.

3. Asegure la existencia de, al menos, una solución real de $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$.

4. Determine la veracidad de la siguiente afirmación:

   "Si f es continua en $[0,1]$ y cumple $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, entonces existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$ (es decir, f tiene un punto fijo)".

5. Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene al menos una solución real.

   a) $x^3 - 3x + 1 = 0$
   b) $x^2 = \sqrt{x+1}$
   c) $\cos(x) = x$
   d) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

6. Suponga que $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0,2]$ y diferenciable en $]0,2[$, y que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$.

   a) Muestre que existe $c_1 \in (0,1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.
   b) Muestre que existe $c_2 \in (1,2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
   c) (Difícil) Muestre que existe $c \in (0,2)$ tal que $f'(c) = 1/3$.

7. Suponga que $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0,2]$ y diferenciable en $(0,2)$, y que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$.

   a) Muestre que existe $c_1 \in (0,1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.
   b) Muestre que existe $c_2 \in (1,2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
   c) Muestre que existe $c \in (0,2)$ tal que $f'(c) = 1/3$.

8. $(*)$ Se desea construir una lata cilíndrica con un volumen de 125 pulgadas cúbicas (cerca de 2 litros) cortando la tapa y el fondo de piezas de metal y formando su lado curvo al doblar una hoja rectangular de metal que coincida con los extremos. ¿Qué radio r y altura h de la lata minimizarán el costo total del material necesario para el rectángulo y los dos cuadrados ?

9. Con 4 metros de cable se forman o un cuadrado o un círculo o ambos. ¿Cuánto cable debe emplearse en cada figura para que encierren la máxima área posible ?

10. Se quiere construir una caja rectangular cerrada con volumen 576 pulgadas cúbicas y cuyo fondo sea el doble de largo que de ancho. Determine las dimensiones de la caja que minimizarán el área total de su superficie.

11. Determine, en cada caso, los valores máximos y mínimos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y trace un gráfico aproximado de la función.

    a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

    b) $(*)$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 4 + x^{\frac{1}{3}}$

    c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

    d) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $j(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 2x - 6)$ (note que en 0 hay un máximo local y que $f'(0)$ no existe)

12. Analice las funciones naturalmente asociadas a las reglas de asignación que se indican, es decir, indique en cada caso: dominio máximo en $\mathbb{R}$, en qué subconjunto de ese dominio es continua y en qué subconjunto del dominio es derivable, en qué intervalos crece y en qué intervalos decrece, máximos y mínimos locales y con ello haga una gráfica aproximada. Compruebe sus resultados en Geogebra.

    a) $x^3 + 4x^2 - 2x - 3$

    b) $4 + x^{\frac{1}{3}}$

    c) $\dfrac{\sqrt{x}}{1 - x}$

    d) $(*)$ $\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x - 2}$

    e) $\dfrac{3x^2 + 3x + 2}{x + 3}$

    f) $3\ln(x) + x^3$

    g) $x^3(x + 2)^2$

    h) $8x^5 - 5x^4 - 20x^3$

    i) $\dfrac{3x^3 + 2x^2 + 2}{(x + 3)(x - 1)}$

    j) $(*)$ $x^{8/3} - 2x^{5/3} - 6x^{2/3}$

    k) $(*)$ $5 + 3\cos(x)$

    l) $(*)$ $2 - 3\,\mathrm{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

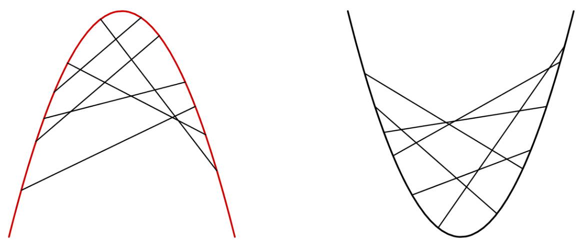
    m) $(*)$ $\dfrac{x^2}{x^2 - 3}$

9.4. Concavidad

Definición 9.3. 1. *Una función es* cóncava hacia abajo *(o simplemente cóncava) en un intervalo* abierto I *si cada segmento recto que une puntos de su gráfica sobre* I *está situado* ***bajo*** *la gráfica (aunque coinciden en los extremos).*

2. *Una función es* cóncava hacia arriba *(o convexa) en un intervalo* abierto I *si cada segmento recto que une puntos de su gráfica sobre* I *está situado* ***sobre*** *la gráfica (aunque coinciden en los extremos).*

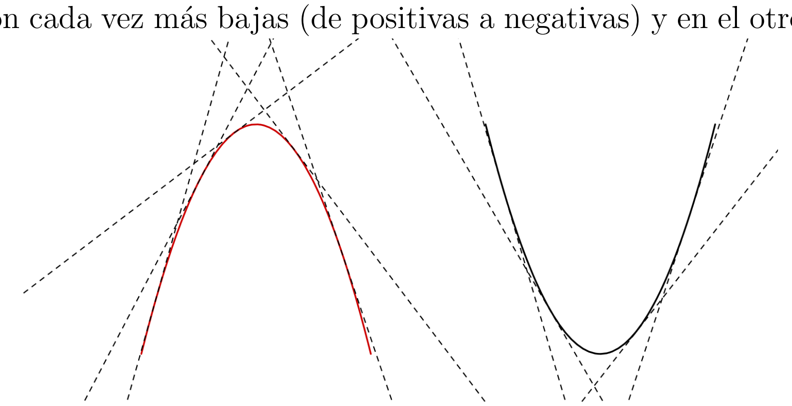
3. *Una función tiene un punto de inflexión en* $c \in \mathrm{dom}(f)$ *si la concavidad es diferente a un lado que al otro de* c*, en un intervalo abierto que contenga a* c*.*



Proposición 9.8 (Concavidad y derivada)**.** 1. *Una función* f *es derivable y cóncava hacia abajo en un intervalo abierto* I *si* f' *es decreciente en* I*.*

2. *Una función* f *es derivable y cóncava hacia arriba en un intervalo abierto* I *si* f' *es creciente en* I*.*

Obvserve en la figura algunas tangentes y note cómo cambian, en cada caso, las pendientes de las tangentes a medida que se avanza de izquierda a derecha: en un caso las pendientes son cada vez más bajas (de positivas a negativas) y en el otro caso el proceso es el contrario:



Definición 9.4 (Segunda derivada)**.** *La segunda derivada de una función es la derivada de su derivada, es decir,* $\big(f')\big)'$*. Se abrevia* f'' *y se dice que* f *es dos veces derivable o que tiene segunda derivada.*

Proposición 9.9 (Concavidad y derivada segunda). *1. Si una función f tiene segunda derivada negativa en un intervalo*[5] *abierto I entonces es cóncava hacia abajo en I.*

2. Si una función f tiene segunda derivada positiva en un intervalo abierto I entonces es cóncava hacia arriba en I.

3. Si una función f tiene segunda derivada positiva en un intervalo abierto $]a, c[$ y tiene segunda derivada negativa en un intervalo abierto $]c, b[$, entonces f tiene un punto de inflexión en el punto c.

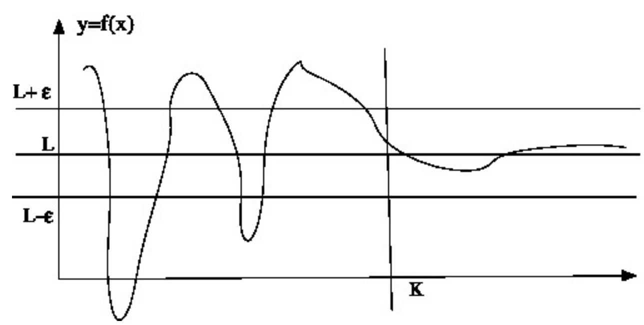
4. Si una función f tiene segunda derivada negativa en un intervalo abierto $]a, c[$ y tiene segunda derivada positiva en un intervalo abierto $]c, b[$, entonces f tiene un punto de inflexión en el punto c.

9.5. Límites infinitos y en el infinito

Definición 9.5 (Límite al infinito). *Sea f función cuyo dominio contiene a un intervalo de la forma $]p, \infty) \subseteq dom(f)$ para algún $p \in \mathbb{R}$. Se define el* límite de f cuando x tiende a ∞, *denotado $\lim\limits_{x\to\infty}$ por:*

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall x \in dom(f)\, \big(K < x \to |f(x) - L| < \epsilon\big)$$

La idea es que f se acerca a L cuando x crece ilimitadamente.



Las reglas de límite de suma, producto y las demás siguen siendo válidas:

Ejemplo 9.5. *1.* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$, $p > 0$

[5] Se entiende "en cada punto del intervalo"

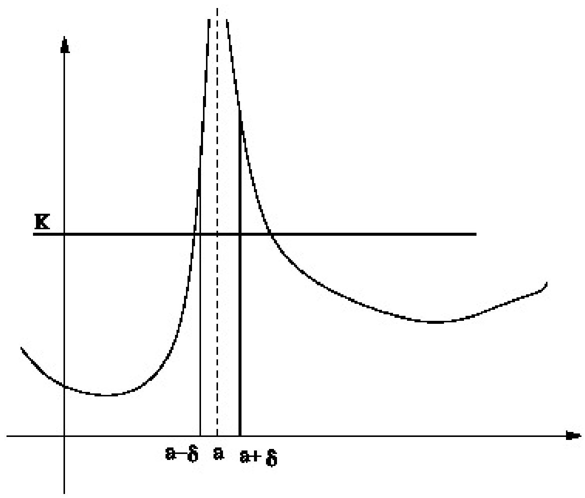
4. $\underset{\substack{x\to\infty \\ \textit{divido numerador y denominador por } x^3}}{\lim} \dfrac{4x^3+5x^3+2x+1}{7x^3-4x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{7-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}} = \dfrac{4}{7}$

Para límites cuando la variable tiende a $-\infty$ todo es análogo; determine de qué modo cambia la respectiva definición (es un tema de desigualdades).

Definición 9.6 (Límites infinitos)**.** *Sean f una función y c no está aislado de de* $\mathrm{dom}(f)$*. Se dice que el límite de f cuando x tiende a c es ∞, denotado $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ por:*

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall K>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in dom(f)\,\big(0<|x-c|<\delta \Rightarrow K<f(x)\big)$$

Note que en ese caso el límite no existe, pero tiene una tendencia definida que será útil al analizar funciones y otros propósitos.



Gráfica de ejemplo.

La definición puede modificarse para trabajar con límites laterales y con límites cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$

Ejemplo 9.6. *1.* $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$*: Sea $K>0$. Entonces analizando $K<\dfrac{1}{(x-2)^2}$ obtenemos $0<(x-2)^2<\dfrac{1}{K}$ (que sea mayor que cero es debido a que $x\neq 2$ ya que no dividimos por cero). Luego sea $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{K}}$: cuando $0<|x-2|<\delta$, tendremos $0<|x-2|<\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ y por lo tanto $x\neq 2$ y $K<\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Hemos probado entonces que $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$.*

2. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty, \quad \lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \infty, \quad \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

Proposición 9.10. *Si $f(x) < g(x)$ en algún intervalo abierto que contiene a c, y $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$*

La propiedad puede adaptarse al caso en que f tiende a $-\infty$, y al caso en que en vez de hacia c, x tiende a $\pm\infty$, o a una combinación de esos casos.

Proposición 9.11.

1. *Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ y g es acotada y en un entorno de c (en particular si $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ existe y es positivo), entonces $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ y g es acotada entre números positivos en un entorno de c (en particular si $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ existe y es positivo), entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ con $f > 0$ en un entorno de c y g es acotada entre números positivos en un entorno de c (en particular si $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ existe y es positivo), entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = +\infty$.*
4. *Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ y g es acotada, entonces $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.*

La propiedad puede adaptarse al caso en que f tiende a $-\infty$, al caso en que g es negativo, y al caso en que en vez de hacia c, x tiende a $\pm\infty$, o a una combinación de esos casos.

Ejercicio 9.2. *Justifique los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3+1}{x^2-1} = \infty$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} 4x + \dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8} = 8$
3. $\lim\limits_{x\to \infty} x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = \infty$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to \infty} x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x + 5 = \infty$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x + 5 = \infty$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} -2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = -\infty$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = \infty$
9. $\lim\limits_{x\to \infty} -3x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x + 5 = -\infty$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} -3x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x + 5 = -\infty$

9.6. Regla de L'Hôpital

Para el cálculo de algunos límites de tipo indeterminado de la forma 0/0, como por ejemplo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan(x)}{\operatorname{sen}(x)}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\operatorname{sen}(x)}$ es útil la siguiente consecuencia del TVM:

Proposición 9.12 (Regla de L'Hôpital)**.** *Sean f y g funciones reales derivables en un intervalo abierto I salvo, tal vez, en un punto $c\in I$. Si f y g cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\forall x\in I-\{c\}\big(g(x)\neq 0\wedge g'(x)\neq 0\big)$
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0=\lim\limits_{x\to c} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe*

Entonces $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe y*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 9.7. *1. Para* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, *como* $\lim\limits_{x\to 0} x-\tan(x)=0$ *y* $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)=0$ *usamos L'Hôpital (abreviado L'H):*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan(x)}{\operatorname{sen}(x)}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\big(x-\tan(x)\big)'}{\big(\operatorname{sen}(x)\big)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2(x)}{\cos(x)}=0$$

2. Para $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\operatorname{sen}(x)}$, *como* $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x=0$ *y* $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)=0$ *puedo usar L'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\operatorname{sen}(x)}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\big(x^2+x\big)'}{\big(\operatorname{sen}(x)\big)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{\cos(x)}=1$$

La Regla de L'Hôpital se extiende también a límites que involucran $\pm\infty$:

Proposición 9.13 (Regla de L'Hôpital y límites infinitos)**.** *Sean f y g funciones reales derivables en un intervalo abierto I salvo, tal vez, en un punto $c\in I$. Si f y g cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\forall x\in I-\{c\}\big(g(x)\neq 0\wedge g'(x)\neq 0\big)$
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ *son ambos cero, o ambos infinitos*
3. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *es ∞ o $-\infty$*

Entonces $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Esa extensión es válida si en consideramos límites laterales.

Proposición 9.14 (Regla de L'Hôpital y límites al infinito)**.** *Sean f y g funciones reales derivables en un intervalo abierto $]a,\infty[$. Si f y g cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\forall x>a\big(g(x)\neq 0\wedge g'(x)\neq 0\big)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ *son ambos cero, o ambos infinitos*
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, o bien es ∞ o bien $-\infty$*

Entonces $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Esa extensión es válida si en consideramos límites a $-\infty$.

Ejemplo 9.8. *Aunque podemos resolverlo de modo directo, ilustraremos el uso de L'H reiteradas veces para* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2+3}{x^4+6x^2+5}$. *Como* $\lim\limits_{x\to\infty}3x^3+x^2+3=\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty}x^4+6x^2+5=\infty$, *usando L'H:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2+3}{x^4+6x^2+5}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\big(3x^3+x^2+3\big)'}{\big(x^4+6x^2+5\big)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x}{4x^3+12x}$$

Pero nuevamente $\lim\limits_{x\to\infty}9x^2+2x=\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty}4x^3+12x=\infty$ *y simplemente usamos L'H otra vez:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x}{4x^3+12x}&\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\big(9x^2+2x\big)'}{\big(4x^3+12x\big)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{18x+2}{12x^2+12}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\big(18x+2\big)'}{\big(12x^2+12\big)'}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{18}{24x}=0\end{aligned}$$

De ese modo $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2+3}{x^4+6x^2+5}=0$

9.7. Trazado de curvas y asíntotas verticales y horizontales

Además de los criterios ya vistos para ayudar a graficar funciones veremos las asíntotas verticales y horizontales. Que son rectas que se aproximan progresiva e indefinidamente a la gráfica de la función f.

La recta de ecuación $x=c$ es una **asíntota vertical** de la curva $y=f(x)$ si

$$\lim_{x\to c^+}f(x)=\pm\infty\quad\text{o si}\quad\lim_{x\to c^-}f(x)=\pm\infty$$

La recta de ecuación $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{o si} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Ejercicio 9.3. *Indique asíntotas verticales y horizontales, si las hay de la curva* $y = \dfrac{x}{x-8}$

La recta $x = 8$ es una asíntota vertical pues $\lim_{x\to 8} f(x) = \infty$
La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

Ejercicio 9.4. *Haga un estudio completo incluidas asíntotas verticales y horizontales, si las hay, de la curva* $y = \dfrac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$

Ejemplo 9.9. $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - 5x^2 - 6x - 123) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(2 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{123}{x^3}\right)$
pero como

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{123}{x^3}\right) = 2 > 0,$$

entonces $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - 5x^2 - 6x - 123) = +\infty$

Ejemplo 9.10. $\lim_{x\to-\infty}(7x^3 + 3x^2 + 9x + 243) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(7 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} + \dfrac{243}{x^3}\right)$
pero como

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty}\left(7 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{243}{x^3}\right) = 7 > 0,$$

entonces $\lim_{x\to-\infty}(7x^3 + 3x^2 + 9x + 243) = -\infty$

Ejemplo 9.11. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2-3x^5}{13x^2+8} = \lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^5\cdot\left(\frac{2}{x^5}-3\right)}{x^2\left(13+\frac{8}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(\dfrac{\frac{2}{x^5}-3}{13+\frac{8}{x^2}}\right)$ *pero como*

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^5}-3}{13+\frac{8}{x^2}}\right) = -\frac{3}{13} < 0$$

entonces $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2-3x^5}{13x^2+8} = +\infty$

Ejemplo 9.12. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(x)}{x+4} = 0$ *porque* $\cos(x)$ *está acotado entre* -1 *y* 1, *y* $\lim_{x\to-\infty}(x+4) = -\infty$

9.8. Guía 2

Concavidad y límites con y hacia $\pm\infty$

1. Analice concavidad y límites hacia $+\infty$ y hacia $-\infty$ (si corresponde) de las funciones del Ejercicio 12 de Guía 9.3

2. Verifique en detalle que si $f''(x) = g''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces existen $m, n \in \mathbb{R}$ constantes tales que $f(x) = g(x) + mx + n$.

3. Analice concavidad de

   a) $x^3 + 4x^2 - 2x - 3$

   b) $4 + x^{\frac{1}{3}}$

   c) $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$

   d) (∗) $\dfrac{x^2+2x+2}{x-2}$

   e) $\dfrac{3x^2+3x+2}{x+3}$

   f) $3\ln(x) + x^3$

   g) $x^3(x+2)^2$

   h) $8x^5 - 5x^4 - 20x^3$

   i) $\dfrac{3x^3+2x^2+2}{(x+3)(x-1)}$

   j) (∗) $x^{8/3} - 2x^{5/3} - 6x^{2/3}$

   k) (∗) $5 + 3\cos(x)$

   l) (∗) $2 - 3\,\mathrm{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

   m) (∗) $\dfrac{x^2}{x^2-3}$

4. Justifique las siguientes afirmaciones

   a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-2x}{x^3} = -\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x+1}{x^3-1} = +\infty$

   c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-8x}{\sqrt{x-1}} = -\infty$

   d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x-3}{\sqrt{2-x}} = +\infty$

   e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 - 5x^2 + 6x + 7 = \infty$

   f) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 - 5x^2 + 6x + 7 = -\infty$

   g) $\lim\limits_{x\to -\infty} -6x^4 - x^3 + x^2 + 7x - 5 = -\infty$

   h) $\lim\limits_{t\to +\infty} -6x^4 - x^3 + x^2 + 7x - 5 = -\infty$

   i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x-8}{\sqrt{3x^2+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

   j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x-8}{\sqrt{3x^2+1}} = -\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

   k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{28x-5}{13x^2+11} = 0$

   l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+4x-5}{7x^2-5x+11} = \dfrac{2}{7}$

5. Determine en cada caso las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la curva, si las hubiera, y haga una gráfica de la misma usando su conocimiento previo y software de apoyo junto a Wolfram Alpha

a) (∗) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

c) $y = \dfrac{x}{x^2-3x+1}$

d) (∗) $y = \dfrac{3x+5}{x-4}$

e) $y = \dfrac{\cos(x)}{2x-\pi}$

f) $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}$

6. Calcule mediante L'Hôpital los siguientes límites y verifíque sus respuestas en

   `http://www.wolframalpha.com/`

   según las instrucciones dadas:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen}(2x)}{x-\operatorname{sen}(2x)}$
   Para Wolfram: una vez en el sitio web, ingrese `limit x to 0 (x+sin(2x))/(x-sin(2x))` y ejecute (con "Enter")

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\cos(2x)-1}$
   Para Wolfram: `(cos(x)-1)/(cos(2x)-1)`

   c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$
   Para Wolfram: `x to infty sqrt(2+x^2)/x`

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\operatorname{cosec}(x)$

   e) (∗) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right)$

   f) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\sec^2(x) - \tan^2(x)\right)$

   g) (∗) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{5}{3}^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

   h) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{5}{3}^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

   i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

   j) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

   k) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{3x^2+8x+6} - \sqrt{3x^2+3x+1}$

   l) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3+x}}{x}$

7. Estudie, en cada caso, la diferenciabilidad de la función, usando L'Hôpital cuando haga falta.

   a) (∗) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$j(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8. Grafique en Wolfram Alpha y en Google (sí, como una consulta cualquiera) $y = \dfrac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$ escrito como `y=(3x^3+500 x^2)/(x^3+500 x^2+100x+2000)`.

   a) Compare las gráficas y trate de explicar por qué se ven distintas y qué debe hacer para saber cuál es la gráfica de la función.

   b) Decida si hay asíntotas verticales, pero no determine dónde analíticamente sino mediante las gráficas e información de los sitios web dados.

   c) Determine también si hay asíntotas horizontales y qué recta es asíntota.

9. $(*)$ Un depósito contiene 550 litros de agua pura. Al depósito se comienza a bombear salmuera que contiene 30 gramos de sal por litro de agua a una velocidad de 25 litros por minuto.

   a) Demuestre que la concentración de sal en el depósito es, t minutos después de iniciado el bombeo de salmuera, de

   $$C(t) = \frac{30t}{22 + t} \quad \text{gramos por litro}$$

   b) Demuestre, usando límites, que la concentración de sal en el depósito tiende asintóticamente a ser de 30 gramos de sal por litro.

10. Exponenciales y Logaritmos

Definición 10.1 (Exponencial (Potencia de exponente real, base positiva)). *Para todo $a > 1$ y todo $x \in \mathbb{R}$ definimos la exponencial de base a de x por:*

1. *Si $x \in \mathbb{N}$, definimos $a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x \text{ veces}}$ es simplemente producto reiterado de a.*
2. *Definimos $a^0 = 1$*
3. *Si $x \in \mathbb{Z}^-$, definimos $a^x = \dfrac{1}{a^{(-x)}}$ ya que $(-x) \in \mathbb{N}$*
4. *Si $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $0 \neq q \neq 1$, definimos $a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$*
5. *Si $x \notin \mathbb{Q}$, definimos $a^x = \lim\limits_{r \to x} a^r$ para $r \in \mathbb{Q}$*

   Dicho de otro modo $a^x = \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q} \wedge r < x\}$

Para $0 < a < 1$, definimos $a^x = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{(-x)}$, ya que $\dfrac{1}{a} > 1$ está definido en el caso anterior.
De ese modo se tiene definido a^x para cualquier $a > 0$ distinto de 1 y todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 10.1 (Propiedad fundamental).

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \, \forall x, y \in \mathbb{R} \big(a^{x+y} = a^x \cdot a^y \ \wedge\ a^0 = 1 \ \wedge\ (a^x = a^y \Leftrightarrow x = y) \ \wedge\ \big(a^x\big)^y = a^{xy}\big)$$

Definición 10.2 (Función exponencial). *La función exponencial de base a, con $1 \neq a > 0$, es $\exp_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\exp_a(x) = a^x$.*

De hecho, podemos considerar la función $\exp_1$ como la función constante de valor 1.[6]
A consecuencia de la propiedad fundamental, se cumple que $\exp_a$ es inyectiva siempre que $1 \neq a > 0$.

Proposición 10.2 (Monotonía). *Para todo $a > 0$ y todos $r, s \in \mathbb{R}$ con $r < s$ se cumple*

- *Si $a > 1$ entonces $0 < a^r < a^s$, es decir, $\exp_a$ es creciente.*
- *Si $0 < a < 1$ entonces $a^r > a^s > 0$, es decir, $\exp_a$ es decreciente.*

Proposición 10.3. *Para todo $a \in \mathbb{R}$ con $1 \neq a > 0$, la función $\exp_a$ cumple:*

1. *Es continua en $\mathbb{R}$.*
2. *Si $a > 1$, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.*

[6]no estamos diciendo que 1^0 tenga sentido, ya que no lo tiene, sino que arbitrariamente asignamos $\exp_1(0) = 1$.

3. *Si* $0 < a < 1$*, entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

4. *El Recorrido o Imagen de* $\exp_a$ *es* $\mathbb{R}^+$.

Definición 10.3 (Logaritmo de base positiva distinta de 1)**.** *Sea* $a > 0$ *con* $a \neq 1$*. Definimos el logaritmo de base a de* $x > 0$ *como la función inversa de* $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$*, es decir:*
$\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *con* $y = \log_a(x) \Longleftrightarrow x = a^y$

Observación 10.1.

- *Cuando* $a = 10$ *se trata de los* logaritmos simples *o de Briggs. En tal caso no se anota la base, es decir, se usa* $\log(x)$ *en vez de* $\log_{10}(x)$.
- *Hay logaritmo y exponencial* naturales *o de Neper, basados en el número de Euler* $e \approx 2,718281828459045$ *que describiremos más adelante. Ambos presentan características especiales y son fundamentales en la matemática y sus aplicaciones. Se escribe* $\ln(x)$ *en vez de* $\log_e(x)$.

Proposición 10.4. *Sean* $a, b > 0$ *con* $a, b \neq 1$ *y sean* $x, y \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

1. $\log_a(a) = 1 \land \log_a(1) = 0$
2. $x = \log_a(a^x)$
3. $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y,\ x, y > 0$
4. $x > 0 \Rightarrow x = a^{\left(\log_a(x)\right)}$
5. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),\ x, y > 0$
6. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),\ x, y > 0$
7. $\log_a(b^y) = y\log_a(b)$
8. $a^x b^x = (ab)^x$

Proposición 10.5 (Monotonía de los logaritmos)**.** *Sea* $0 < a \neq 1$*. Entonces:*

1. $a > 1 \Rightarrow \big(0 < x < y \Leftrightarrow \log_a(x) < \log_a(y)\big)$
2. $0 < a < 1 \Rightarrow \big(0 < x < y \Leftrightarrow \log_a(x) > \log_a(y)\big)$

Proposición 10.6 (Cambios de base)**.** *Sean* $a, b > 0$ *con* $a, b \neq 1$ *y sean* $x, y \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

1. $a^x = b^{x\log_b(a)}$
2. $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Observación 10.2. *En particular, basta con usar base 10 o base e para expresar toda exponencial y logaritmo.*

Por sus propiedades respecto de escala de medición (notación científica en particular), la base 10 es relevante.

Por la simpleza que da para límites especiales, derivadas e integrales, la base e es relevante.

Proposición 10.7 (Derivadas e integrales de exponenciales)**.**

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \therefore \int e^x\,dx = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\textit{Si } 1 \neq a > 0,\ \textit{entonces } \frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln(a) \qquad \therefore \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Proposición 10.8 (Límites especiales)**.** *Sea* $0 < a \neq 1$. *Entonces:*

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$, *y en particular* $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln(e) = 1$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\log_a(x)}{x-1} = \frac{1}{\ln(a)}$, *y en particular* $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{1}{e} = 1$

Ejemplo 10.1. *Calcular* x^x *para* $x > 0$

Solución: Basta notar que, para cada $x > 0$, $x^x = e^{x\cdot\ln(x)}$ y por tanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln(x)} = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(x \cdot \ln(x)\right)\\ &= e^{x\cdot\ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)\end{aligned}$$

$\square$

10.1. Guía 3

Repaso de operatoria básica

1. Sean a, b números reales. Pruebe que :

   a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

   b) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

   c) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

   d) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

2. Sean a, b, c, d números reales tales que $b \neq 0, d \neq 0$ y $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Pruebe que

   a) $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$.

   b) $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$.

   c) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$ si $a-b \neq 0 \wedge c-d \neq 0$.

   d) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+c}{b+d}$ si $b+d \neq 0$.

3. Sean x, y números reales positivos. Probar que $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(x+y) \geq 4$

4. Factorizar por completo las siguientes expresiones

   a) $9x^2 + 30x + 25$

   b) $x^4 - y^4$

   c) $27x^3 + y^3$

   d) $24x^4 - 3x$

   e) $x^3 - 7x - 2x^2 + 14$

   f) $x^5 - x^2 - 4x^3 + 4$

5. Simplifique la fracción

   a) $\dfrac{2x^3 - 2xy^2}{4x^4 - 8x^3y + 4x^2y^2}$

   b) $\dfrac{4x(x+2)^2 - 2x^2(2)(x+2)}{(x+2)^4}$

   c) $\dfrac{(x^2-4)^2(-4) - (-4x)(4x)(x^2-4)}{(x^2-4)^2}$

   d) $\dfrac{(x^2-3)^2(-6x) - (-3x^2-9)(4x)(x^2-3)}{(x^2-3)^2}$

6. Dadas las expresiones siguientes, expréselas como una fracción simple, únicamente con exponentes positivos

   a) $3(x+1)^{-1} - 3x(x+1)^{-2}$

   b) $4x^3(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + 4x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

   c) $\dfrac{3x^3}{2}(x^3-3)^{-\frac{1}{2}} + (x^3-3)^{\frac{1}{2}}$

   d) $\dfrac{2x^2}{3}(x^2-4)^{-\frac{2}{3}} + (x^2-4)^{\frac{1}{3}}$

7. Racionalice el numerador y simplifique la fracción cuando sea posible

a) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

b) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{x^2-3x-4}$

c) $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

d) $\dfrac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}$

8. Realice las operaciones y exprese su respuesta en la forma radical más simple, cuando sea posible racionalice los denominadores

   a) $(3xy^2\sqrt{x^2y})(2x\sqrt{18xy^2})$

   b) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{x-1}}$

   c) $\sqrt{27}-3\sqrt{18}+6\sqrt{12}$

   d) $\dfrac{xy^2\sqrt{24x^2y}}{x\sqrt{8x^5y}}$

9. Dadas las expresiones siguientes, expréselas como una fracción simple.

   a) $3\sqrt{x^2-2}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2}}$

   b) $3x\sqrt{x^2+4}+\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$

   c) $\dfrac{\sqrt{\frac{2}{x+h}}-\sqrt{\frac{2}{x}}}{h}$

   d) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x+h+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{h}$

Exponenciales y logaritmos

1. En cada uno de los casos siguientes, determinar el $t \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ que da lugar a una afirmación verdadera.

   a) $3^5\cdot 4^5 = 12^t$

   b) $9\cdot 81 = 12^t$

   c) $5^t\cdot 5^t = 1$

   d) $2^5\cdot 3^2 = 6^2\cdot 8^t$

   e) $8\cdot 10^3 = 20^t$

   f) $4^{13}\cdot 7^{10} = 4^t\cdot 28^{10}$

2. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones.

   a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$

   b) $(2^n)^2 = 4^n$

   c) $2^{2^n}\cdot 2^{2^n} = 2^{2^{n+1}}$

   d) $2^{2^{n\cdot k}} = (2^{2^n})^k$

3. Sean $a, b > 0$ con $a, b \neq 1$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre usando propiedades de exponencial:

   a) $\log_a(a) = 1 \wedge \log_a(1) = 0$

   b) $y = \log_a(a^y)$

   c) $x > 0 \Rightarrow x = a^{\left(\log_a(x)\right)}$

   d) $\log_a(xy) = \log_a(x)+\log_a(y)$, $x, y > 0$

   e) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x)-\log_a(y)$, $x, y > 0$

   f) $\log_a(b^y) = y\log_a(b)$

   g) $(a^x)^y = a^{xy}$

   h) $a^xb^x = (ab)^x$

   i) $a^x = b^{x\log_b(a)}$

   j) $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

4. Simplifique:

a) $\log_3(9)$
b) $\log_2(8)$
c) $\log_7(7)$
d) $\log_3(1/81)$
e) $\log_{10}(1000)$
f) $\log_{10}(0,001)$
g) $\log_{1/16}(1/4)$
h) $\log_5(1/25)$
i) $\log_9(1/3)$
j) $\log_5(\sqrt{5})$
k) $\log_6(1/6)$
l) $\log_{32}(2)$
m) $\log_{1/3}(9)$
n) $\log_{1/2}(64)$
ñ) $\log_{16}(1/8)$
o) $\log_7(49^{10})$
p) $\log_{10}(\sqrt{10})$
q) $\log_{\sqrt{2}}(8)$

5. Reescriba en función de $\log(x)$, $\log(y)$ y $\log(z)$, asumiendo $x, y, z > 0$:

a) $\log\left(\dfrac{\sqrt{x^3}}{y^5 z^2}\right)$
b) $\log_4(xz)$
c) $\log_4(y/x)$
d) $\log_4(\sqrt[3]{z}))$
e) $\log_3(xyz)$
f) $\log_3(xz/y)$
g) $\log_3(\sqrt[5]{y})$
h) $\log_7\left(\dfrac{x^3 w}{y^2 z^4}\right)$
i) $\log_5\left(\dfrac{y^5 w^2}{x^4 z^3}\right)$
j) $\log_9\left(\dfrac{\sqrt{y}}{x^4 \sqrt[3]{z}}\right)$
k) $\log_6\left(\sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5 z}}\right)$
l) $\log_3\left(x\sqrt[3]{\dfrac{y^4}{z^5}}\right)$

6. Resuelva las ecuaciones siguientes, si es que tienen solución

a) $\log_7(x) = 3$
b) $\log_{1/3}(x) = -4$
c) $\log_4(x) = 3$
d) $\log_{1/4}(x) = -3$
e) $\log_2(x) = 3/2$
f) $\log_{1/4}(x) = 7/2$
g) $\log_3(x) = 2/3$
h) $\log_{1/9}(x) = 5/2$
i) $\log_3(x) = -12$
j) $\log_4(x) = \log_4(8 - x)$
k) $\log_3(x+4) = \log_3(1-x)$
l) $\log_5(x-2) = \log_5(3x+7)$
m) $\log_7(x-5) = \log_7(6x)$
n) $\log_3(x^2) = \log_3(-3x-2)$
ñ) $\log_2(x^2) = \log_2(12-x)$
o) $\log_3(x-4) = 2$
p) $\log_2(x-5) = 4$
q) $\log_9(x) = 3/2$
r) $\log_4(x) = -3/2$
s) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6(3)$
t) $\log_4(3x+2) = \log_4(5) + \log_4(3)$
u) $2\log_3(x) = 3\log_3(5)$
v) $\log_3(x) - \log_3(x+1) = 3\log_3(4)$
w) $\log_2(x+2) - \log_2(x) = 2\log_2(4)$

7. Resuelva dejando la(s) solución(es) expresada(s) mediante logaritmos.

a) $5^x = 16$
b) $10^{-x} = 2$
c) $2^{1-x} = 3$
d) $3^{2x-1} = 5$
e) $4(1 + 10^{5x}) = 9$
f) $5^x = 4^{x+1}$
g) $10^x + 2 \cdot 10^{-x} = 3$
h) $3^x - 3^{-x} = 4$

Derivadas con exponenciales, logaritmos, y trigonométricas inversas

Calcule las siguientes derivadas

1. $\left(e^{3x^2+5}\right)'$
2. $\left(3^{5x}\right)'$
3. $(2\ln(\cos(2x)))'$
4. $\left(3^{\sqrt{x^2+1}}\right)'$
5. $\left(\dfrac{\ln(\operatorname{sen}(x^2+1))}{x}\right)'$
6. $\left(\dfrac{x^2\cdot\ln(4x)}{e^{2x}}\right)'$
7. $\left(e^{4^x}\right)'$
8. $\left((3x^2+5)^{\cos(x)}\right)'$
9. $(x\log_2(\log_3(x)))'$
10. $\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'$
11. $\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{2x-1}\right)\right)'$
12. $(\ln(\tan(x)))'$
13. $\left(\sec\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)'$
14. $\left(\tan\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)\right)'$
15. $\left(x\cos(x)-\sqrt{1-x^2}\right)'$
16. $\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\right)\right)'$
17. $\left(x^2\tan(3x)\right)'$
18. $\left(x\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)+\sqrt{16-x^2}\right)'$
19. $\left(\cos\left(\dfrac{b+a\cos(x)}{a+b\cos(x)}\right)\right)'$, con $0\leq x\leq\pi$, $a>b>0$

Integrales con exponencial y logaritmo

Calcule, inspirándose a veces en las derivadas anteriores y en las integrales que vaya obteniéndo:

a) $\displaystyle\int (e^x+2^x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \left(5\cdot 8^x+\left(\frac{1}{e}\right)^x\right)dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2^x}+3^{-x}\right)dx$

d) (∗) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx$

e) (∗) $\displaystyle\int 5\cdot 3^{5x}\,dx$

f) $\displaystyle\int 2^{6x}\,dx$

g) (∗) $\displaystyle\int e^{4x+1}\,dx$

h) $\displaystyle\int 5^{3-2x}\,dx$

i) $\displaystyle\int 12^{\frac{x}{7}+11}\,dx$

j) (∗) $\displaystyle\int 6x\cdot e^{3x^2+5}\,dx$

k) $\displaystyle\int x\cdot e^{x^2}\,dx$

l) $\displaystyle\int x\cdot e^{x^2+7}\,dx$

m) (∗) $\displaystyle\int x\cdot 5^{3x^2+1}\,dx$

n) $\displaystyle\int x^2\cdot 7^{x^3+34}\,dx$

ñ) $\displaystyle\int \frac{3}{4x}\,dx$

$o)$ $\displaystyle\int \frac{5}{x+1}\,dx$

$p)$ $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}\,dx$

$q)$ $\displaystyle\int \frac{-4}{7x+56}\,dx$

$r)$ $(*)$ $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$

$s)$ $\displaystyle\int \frac{32x}{5x^2-502}\,dx$

$t)$ $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$

$u)$ $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+3}{x^3+2x^2+3x+76}\,dx$

$v)$ $(*)$ $\displaystyle\int \frac{3\cos(3x+1)}{\operatorname{sen}(3x+1)}\,dx$

$w)$ $\displaystyle\int \frac{4-\operatorname{sen}(x)}{4x+\cos(x)}\,dx$

$x)$ $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

11. Ecuaciones diferenciales

11.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Definición 11.1. *Son ecuaciones que buscan por solución a funciones, y la ecuación a cumplir vincula a la función, su variable, y la derivada de la función respecto de dicha variable. Se escriben de modo abreviado como* $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$ *donde* $H(x, y)$ *es una expresión (en realidad es una función en dos variables) y donde se espera que* y *sea función derivable de* x*, lo que se denota* $y = y(x)$ *dado que no se conoce a la función* y*, pero se quiere indicar que es función de* x*.*

Observación 11.1. *Las integrales indefinidas son un caso simple de este tipo de EDO ya que* $\int g(x)\, dx = y(x) + C$ *ssi* $\frac{dy}{dx} = g(x)$ *y se tendría* $H(x, y) = g(x)$

Observación 11.2. *Una ecuación diferencial de primer orden tiene infinitas soluciones. Pero si imponemos una condición inicial, entonces la solución es única. Se habla de un problema de valores iniciales o problema de Cauchy.*

Escribiremos un problema de Cauchy como

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = H(x, y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

donde x_0 *pertenece a algún intervalo en el que la EDO y sus soluciones tengan sentido, y para* y_0 *arbitrario.*

Ejemplo 11.1. *Escriba la situación siguiente como un problema de Cauchy y resuélvalo:*

Encuentre la única solución $y(x)$ *de la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = 2^x + x^2$ *sujeta a la condición inicial* $y(0) = 1$*.*

Solución: El problema de Cauchy indicado es

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = 2^x + x^2 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

y para resolverlo notamos que la EDO es simplemente una expresión para primitivas de $2^x + x^2$, es decir,

$$\begin{aligned} y(x) = &\int (2^x + x^2)dx = \int (e^{x\ln(2)} + x^2)dx \\ = &\frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{x^3}{3} + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Entonces para $k \in \mathbb{R}$ se debe tener $1 = y(0) = \dfrac{2^0}{\ln(2)} + \dfrac{0^3}{3} + k = \dfrac{1}{\ln(2)} + k$, es decir, $k = 1 - \dfrac{1}{\ln(2)}$, por lo que la solución es

$$y(x) = \frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{x^3}{3} + 1 - \frac{1}{\ln(2)}$$

□

Definición 11.2. 1. *Diremos que una ecuación diferencial de primer orden es lineal si se puede escribir como:*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)y + h(x),$$

donde g y h son funciones que dependen sólo de la variable independiente x.

2. *Diremos que una ecuación diferencial lineal de primer orden es homogénea si la podemos escribir como: $\dfrac{dy}{dx} = g(x)y$*

Observación 11.3. *Note que una EDO lineal homogénea siempre admite como solución a la función constante de valor* 0.

Las ecuaciones diferenciales se usan para describir modelos matemáticos de situaciones reales. Antes de resolver ecuaciones diferenciales veremos algunos ejemplos.

11.1.1. Ejemplos de Ecuaciones lineales homogéneas

Ejemplo 11.2. Decaimiento radioactivo *Se considera una muestra de material que tiene $N(t)$ átomos de un isótopo radiactivo en el momento t. Se ha observado que una fracción constante de estos átomos radioactivos decae espontáneamente durante cada unidad de tiempo en proporci'on a la cantidad $N(t)$. Para conseguir un modelo para $N(t)$ se usa la ecuación diferencial $\dfrac{dN}{dt} = -k \cdot N$, donde $k > 0$ es una constate* positiva*, y el signo negativo indica explítamente que N decrece al aumentar t. Si N_0 es el número de átomos radioactivos presentes en la muestra en un instante t_0, se tiene que la evolución del proceso es descrita por el problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} & = -k \cdot N \\ N(t_0) & = N_0 > 0 \end{cases}$$

donde asumimos que $N > 0$ dado el contexto. Note que el tiempo t se puede medir de forma relativa, esto es, podemos asumir que $t = 0$ es el instante en que se comienza a observar la desintegración, por ejemplo, u otro instante arbitrario pero fijo para el modelo.

Ejemplo 11.3. Crecimiento exponencial *Sea $P(t) > 0$ el tamaño de una población en un instante t (medido en años) con tasa de natalidad β y tasa de mortandad δ, ambas constantes en este modelo. Se tiene que la razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional al tamaño de la población, es decir, su crecimiento está descrito por la ecuación diferencial: $\dfrac{dP}{dt} = k \cdot P$, donde $k = \beta - \delta > 0$ es la tasa de crecimiento anual. Si P_0 es la biomasa bacteriana inicial al iniciarse el proceso de crecimiento (o algún instante predeterminado pero fijo), se tiene que la evolución del proceso es descrita por el problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} & = k \cdot P \\ P(0) & = P_0 > 0 \end{cases}$$

Acá asumimos que $k > 0$ porque se trata de crecimiento, pero usamos $-k$ cuando se trata de decrecimiento (mantenemos en esta sección $k > 0$ para explicitar crecimiento o decrecimiento).

Ejemplo 11.4. Eliminación de medicamentos *Suponga que se sabe que la cantidad $A(t) >$ de cierto medicamento en la corriente sanguínea, medido por el exceso sobre el nivel natural de la misma, disminuye a una razón de cambio proporcional a la cantidad excedente actual. Esto es, $\dfrac{dA}{dt} = -kA$ donde $k > 0$ se denomina constante de eliminación del medicamento. Si A_0 es la cantidad inicial (tiempo relativo a ese instante) de medicamento, se tiene que la evolución del proceso es descrita por el problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} & = -k \cdot A \\ A(0) & = A_0 > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 11.5 (Un caso de EDO lineal no homogénea)**. Ley de enfriamiento de Newton** *Consideremos el cambio de temperatura de un objeto que se enfría. La ley de enfríamiento de Newton considera que la velocidad del cambio de temperatura es directamente proporcional a la diferencia de temperatura del objeto y del medio que lo rodea. Además, se supone que el medio que rodea al cuerpo tiene una temperatura constante T_a.*

La ley de enfríamiento de Newton afirma que la función que asigna la temperatura $T(t)$ de un objeto en el tiempo t es solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} & = -k(T - T_a) \\ T(0) & = T_0 \end{cases}$$

donde $k > 0$ es un coeficiente de conductividad térmico que depende de cada objeto y T_0 es la temperatura inicial del objeto.

11.1.2. El método de separación de variables para resolver algunas EDO

Definición 11.3. *Una EDO se dice de variables separables si se puede escribir de la forma* $\dfrac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

Proposición 11.1. *Una EDO separable* $\dfrac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ *se puede resolver por medio de*

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

Demostración. Note que $\dfrac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ ssi $\dfrac{1}{h(y)}\dfrac{dy}{dx} = g(x)$ y como además y es (o debe ser) función de x entonces

$$\begin{aligned}
\int g(x)\, dx &= \int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx}\, dx \\
&\left(\text{pero realizando un cambio de variable} \begin{pmatrix} u & = & y(x) \\ \therefore du & = y'\, dx = \dfrac{dy}{dx}\, dx & \end{pmatrix} \right) \\
&= \int \frac{1}{h(u)}\, du \\
&\left(\begin{array}{c} \text{que entrega funciones que, al derivar respecto de } u \text{, dan } \dfrac{1}{h(u)}, \\ \text{lo que equivale a que al derivar respecto de } y \text{ den } \dfrac{1}{h(y)} \end{array} \right) \\
&= \int \frac{1}{h(y)}\, dy
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 11.6. *Un cultivo de bacterias Streptococcus A recién inoculadas (un grupo común de microorganismos que causa inflamación séptica en la garganta) contiene 100 células. Al revisar el cultivo 60 minutos después, se determina que hay 450 células.*

1. *Determine el número de células presentes en cualquier tiempo t (medido en minutos), suponiendo que el crecimiento es exponencial.*

2. *¿Cuál es el tiempo de duplicación de esta bacteria? (el tiempo de duplicación es el tiempo que se requiere para que el número de células se duplique).*

<u>Solución</u>:

1. Crecimiento exponencial significa que $\dfrac{dP}{dt} = kP(t)$, $k > 0$, donde $P(t)$ es el número de células en el instante t. Se trata de una EDO de variables separables, y se tiene

$\displaystyle\int \frac{dP}{P} = k\int dt$, es decir, $\ln(|P(t)|) = kt + C$, para algún $C \in \mathbb{R}$. Por otra parte, el contexto indica que $P(t) > 0$, por lo cual $|P(t)| = P(t)$, es decir, $\ln(P(t)) = kt + C$.

Pero considerando $t = 0$ como el momento de la inoculación, se sabe que $\ln(100) = 0 + C$, es decir, $C = \ln(100)$, de donde $P(t) = e^{kt+\ln(100)} = 100e^{kt}$.

Pero también sabemos que $P(60) = 450$, es decir, $450 = 100e^{k60}$ $4,5 = e^{60k}$ de donde $k = \dfrac{\ln(4,5)}{60} > 0$.

Por lo tanto $P(t) = 100e^{\frac{\ln(4,5)}{60}t}$ o mejor

$$P(t) = 100\big(\sqrt[60]{4,5}\big)^t$$

2. Sean $t, \tau \in \mathbb{R}$. Entonces $P(t)$ se duplica al transcurrir un tiempo τ ssi $P(t+\tau) = 2P(t)$, es decir, $100\big(\sqrt[60]{4,5}\big)^{(t+\tau)} = 2 \cdot 100\big(\sqrt[60]{4,5}\big)^t$, que equivale a $100\big(\sqrt[60]{4,5}\big)^t \cdot \big(\sqrt[60]{4,5}\big)^\tau = 2 \cdot 100\big(\sqrt[60]{4,5}\big)^t$ y como la exponencial no es cero, simplificando se obtiene $\big(\sqrt[60]{4,5}\big)^\tau = 2$, y así $\tau = \dfrac{60\ln(2)}{\ln(4,5)} \sim 27,65$. De paso, eso significa que el tiempo de duplicación es invariante, no depende del instante t a partir del cual quiero que se duplique la población.

   Luego el tiempo de duplicación para este cultivo de Streptococcus A es cerca de 28 minutos.

$\square$

Ejemplo 11.7 (Ley de enfriamiento de Newton en medidas anglosajonas)**.** *Una taza de café instantáneo recién servida tiene una temperatura de* 180^oF*. Después de dos minutos de permanecer en una sala a* 70^oF*, el café se enfría hasta* 165^oF*.*

1. *Determine la función solución.*
2. *¿En qué tiempo* t *el café llega a una temperatura de* 120^oF*.?*

<u>Solución</u>:

1. Es un problema de la ley de enfriamiento de Newton, en que la temperatura ambiente (se asume constante) es $T_a = 70°F$ y efectivamente el café se enfría, es decir, se tiene $T(t) > 70$, en cada instante t medido en minutos desde que se sirvió la taza de café, por lo que se requiere de una constante $k > 0$ con la cual se cumpla el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} & = -k(T-70) \\ T(0) & = 180 \end{cases}$$

   y adicionalmente se sabe que $T(2) = 165°$.

Como la EDO es de variables separables, entonces $\int \frac{dT}{T-70} = -k\int dt$, es decir, $\ln(T-70) = C - kt,\ C \in \mathbb{R}$ o mejor,

$$T(t) = 70 + e^C e^{-kt}$$

Pero $180 = T(0) = 70 + e^C e^0$ de donde $e^C = 110$ y por tanto $T(t) = 70 + 110e^{kt}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Además $165 = T(2) = 70 + 110e^{2k}$ de donde $k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{95}{110}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{95}{110}}\right)$. Luego

$$T(t) = 70 + 110 \cdot e^{t\cdot\ln\left(\sqrt{\frac{95}{110}}\right)}$$

o mejor

$$T(t) = 70 + 110\left(\sqrt{\frac{95}{110}}\right)^t, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}$$

2. Sea $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$120 = T(t) = 70 + 110\left(\sqrt{\frac{95}{110}}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{50}{110}\right)}{\ln\left(\sqrt{\frac{95}{110}}\right)} \sim 10,76$$

$\square$

Ejemplo 11.8. *Se llama* **vida media** τ **de un isótopo** *al tiempo que se requiere para que la mitad de la cantidad inicial se desintegre en otros elementos, es decir* $\tau = t$ *cuando* $N(t) = \frac{1}{2}N(0)$. *Pruebe que* $\tau = \frac{\ln(2)}{k}$.

Observación 11.4. *Recordemos que en los ejemplos (11.2), (11.3) y (11.4) teníamos una ecuación del tipo:*

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \qquad \text{con } k > 0 \text{ e } y > 0$$

y aplicando el método de separación de variables tenemos

$$\int \frac{dy}{y} = -k\int dt$$

como $y > 0$,

$$\ln(|y|) = \ln(y) = -kt + C$$

para algún $C \in \mathbb{R}$. *Por lo tanto,*

$$y(t) = e^{-kt+C} = e^{-kt} \cdot e^C = e^C \cdot e^{-kt}$$

Para $t = 0$ *se obtiene* $y(0) = e^C$ *y la solución de la ecuación resulta ser*

$$y(t) = y(0)e^{-kt}.$$

Ejemplo 11.9 (Ley de enfriamiento de Newton). *Recordemos dicha ley.*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad k > 0$$

Rescribamosla como

$$\frac{1}{T - T_a} dT = -kdt$$

Como se trata de enfriamiento se tiene que $T(t) > T_a$,

$$\int \frac{1}{T - T_a} dT = \int -kdt$$

Luego

$$\ln(|T - T_a|) = \ln(T - T_a) = -kt + C$$

$$T(t) - T_a = e^{kt+C} = e^{-kt} \cdot e^C$$

Para $t = 0$ *se tiene* $e^C = T(0) - T_a$, *luego,*

$$T(t) = T_a + e^{-kt}(T(0) - T_a)$$

Notemos que

$$\lim_{t \to +\infty} T(t) = T_a,$$

es decir, a medida que transcurre el tiempo, la temperatura del objeto converge a la temperatura del medio que lo rodea. La rapidez de dicha convergencia depende el coeficente de conductividad térmica k.

Ejemplo 11.10. *Recordemos la Ecuación logística,que se presentó al inicio del curso de Matemáticas I, que indica cómo crece una población sujeta a restricciones externas de espacio o alimento. Inicialmente crece exponencialmente y luego se va frenando hasta llegar a un límite. Pero la ecuación que establece el modelo indica que la rapidez de crecimiento en cada instante* t *es proporcional al tamaño actual de la población* P *y proporcional a la diferencia entre el tamaño máximo* M *y la población actual, es decir, el crecimiento está descrito por la ecuación diferencial:*

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \quad k > 0$$

donde k *es la velocidad de crecimiento de la población (sin contar la limitación externa* M*). Si* $P(0)$ *es la población inicial la evolución del proceso está descrita por el problema de Cauchy:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dP}{dt} & = & kP(M - P) \\ P(0) & = & P_0 > 0. \end{array} \right.$$

Supongamos que $M > P$. Para aplicar el método de separación de variable usemos

$$\frac{1}{P(M-P)}dP = kdt.$$

Por método de fracciones parciales

$$\frac{1}{P(M-P)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\right)$$

Luego

$$\frac{1}{M}\int\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\right)dP = \int kdt$$

Como $P > 0$ y $M - P > 0$ se tiene que

$$\frac{1}{M}\left(\; ln(P) - \ln(M-P)\right) = \int kdt$$

Es decir,

$$\ln\left(\frac{P}{M-P}\right) = kMt + C$$

De donde

$$\frac{P}{M-P} = e^{kMt+C} = e^{kMt}\cdot e^{C}$$

Usando la condición inicial $P(0) = P_0$, obtenemos que $e^C = \dfrac{P_0}{M-P_0}$ luego

$$\frac{P}{M-P} = \frac{P_0 e^{kMt}}{M-P_0}$$

Finalmente la función solución es

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M-P_0)e^{-kMt}}$$

Notemos que si la población inicial $P_0 < M$, entonces $P(t) < M$ para todo $t > 0$ y

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = M,$$

Como $\dfrac{dP}{dt} = kP(M-P) > 0$ a medida que transcurre el tiempo, la población crece en forma regular a una población límite finito M cuando $t \to +\infty$.

Si $P_0 > M$, un análisis similar demuestra que $P(t)$ decrece en forma regular a una población límite finito M cuando $t \to +\infty$.

Ejemplo 11.11. *Supongamos que en el instante $t = 0$, la mitad de una población de 100 mil personas ha escuchado un rumor y que el número de $P(t)$ de personas que lo han escuchado crece a razón de 1000 personas por día. Si $P(t)$ satisgace la ecuación logística*

$$\frac{dP}{dt} = kP(100 - P)$$

(con P en miles de personas y t en días), determine el número de personas que han escuchado el rumor después de 30 días.

<u>Solución</u>: Necesitamos determinar el valor de la constante k. Sabemos que $P(0) = 50$ y $P'(0) = 1$ luego $1 = k50(100 - 50)$. y $k = 0.0004$, luego la ecuación diferencial queda

$$\frac{dP}{dt} = 0.0004P(100 - P)$$

Por separación de variables tenemos

$$\int \frac{1}{P(100 - P)} dP = \int 0.0004tdt$$

Por método de fracciones parciales

$$\frac{1}{P(100 - P)} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{100 - P}\right)$$

Luego

$$\frac{1}{100}\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{100 - P}\right)dP = \int 0.0004dt$$

y

$$\left(ln(P) - ln(100 - P)\right) = \int 0.04dt$$

Es decir,

$$ln\left(\frac{P}{100 - P}\right) = 0.04t + C$$

Cuando $t = 0, P(0) = 50$ luego, $C = 0$, De donde

$$\frac{P}{100 - P} = e^{0.04t}$$

Finalmente la función solución es

$$P(t) = \frac{100e^{0.04t}}{1 + e^{0.04t}}$$

Por lo tanto, el número de personas que han escuchado el rumor después de 30 días es $P(30)$ que es aproximadamente 76.85 miles de personas. $\square$

Teorema 11.1 (Existencia y unicidad de solución de un problema)**.** *Dado el problema de Cauchy (o de valor inicial)*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = H(x,y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

si tanto H *como* $\dfrac{\partial H}{\partial y}$ *son funciones continuas en un rectángulo abierto* $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < d\}$ *que contiene a* (x_0, y_0)*, entonces existe una única solución* $y = f(x)$ *del problema, con* f *definida en un intervalo* $]x_0 - \delta,\, x_0 + \delta[\; \subseteq \;]a, b[$.

11.2. Solución general EDO Lineales

Observación 11.5. *Para resolver una EDO Lineal de la forma* $\dfrac{dy}{dx} = g(x)y + h(x)$, *se sigue el siguiente método:*

1. *Determinamos un* factor integrante *de la "forma"* $\mu(x) = e^{\int -g(x)\,dx}$ [7] *y notamos que, por regla de la cadena,*

$$\mu'(x) = e^{\int -g(x)\,dx} \cdot \left(\int -g(x)\,dx\right)' = \mu(x) \cdot \big(-g(x)\big) = -\mu(x)g(x)$$

2. *Multiplicamos la EDO Lineal por* $\mu(x)$ *y al reordenar*

$$\mu(x) \cdot h(x) = \mu(x)\frac{dy}{dx} - \mu(x)g(x)y = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)y = \big(\mu(x)y\big)'$$

3. *Entonces* $\mu(x)y$ *se obtiene de* $\displaystyle\int \mu(x) \cdot h(x)\,dx$, *de donde se despeja* y *y obtiene* y.

Ejemplo 11.12. *Resolver* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + x^2\cos(x)$, *con* $x > 0$.

<u>Solución</u>: La EDO es Lineal, así que aplicamos el método anterior:

1. En este caso, $g(x) = \dfrac{2}{x}$ y $h(x) = x^2\cos(x)$.

2. Buscamos un factor integrante de la "forma" $e^{\int -g(x)\,dx}$, pero

$$\int -g(x)\,dx = \int \frac{-2}{x}\,dx = -2\ln|x| + C = -2\ln(x) + C(\text{ ya que } x > 0)$$

   Elegimos factor integrante $\mu(x) = e^{-2\ln(x)} = x^{-2}$.

3. Entonces

$$\begin{aligned} \mu(x)h(x) &= x^{-2} \cdot x^2\cos(x) = \cos(x) && \text{y por otra parte} \\ \mu(x)h(x) &= \mu(x)\frac{dy}{dx} - \mu(x)g(x)y = x^{-2}\frac{dy}{dx} - x^{-2}\frac{2}{x}y \\ &= x^{-2}\frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y = \big(x^{-2}y\big)' \end{aligned}$$

   Luego $\dfrac{d\,x^{-2}y}{dx} = \cos(x)$, $x > 0$

[7] Note que el efecto de la constante de integración es producir ponderadores no negativos para $\mu(x)$, de la forma e^C como al resolver crecimiento exponencial o decaimiento radioactivo, y que no son relevantes.

4. Entonces $x^{-2}y + C = \displaystyle\int \cos(x)\,dx$, de donde $x^{-2}y = \operatorname{sen}(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, de donde obtenemos las soluciones

$$y = x^2 \operatorname{sen}(x) + Cx^2,\ x > 0,\ C \in \mathbb{R}.$$

En caso de que se trate de un problema de valor inicial (o de Cauchy) con $y(x_0) = y_0$, $x_0 > 0$, ello determina la constante C. $\square$

11.3. Guía 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1. Encuentre la única solución del problema de Cauchy: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = x\,\mathrm{sen}(2x) \\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) & = 0 \end{cases}$

2. ($*$) La vida media de la morfina en el torrente sanguíneo humano es de tres horas. Si inicialmente hay $0,4$ mg de morfina en el torrente sanguíneo, halle la ecuación para la cantidad de morfina presente en el torrente sanguíneo después de t horas.
   ¿Cuándo llegará la cantidad por debajo de 0.01 mg?

3. Un espécimen de carbón de leña encontrado en Stonehenge contiene el 63 % de carbono 14 con respecto de una muestra de carbón actual. ¿Cuál es la edad de la muestra ?
   Resp: Aproximadamente 3800 años.

4. El radio se desintegra exponencialmente. Su vida media es de 1620 años. ¿Cuánto tiempo tardará una muestra de 50 gr. en reducirse a 5gr ?

5. ($*$) Un asado de 5 kilos que inicialmente está a 25 °C se coloca en un horno que está a 400 °C. Al cabo de 10 minutos el asado está a 100 °C. ¿Cuántos minutos más tardará para llegar a 150 °C? La ecuación diferencial que representa esta situación es $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$, $k > 0$ donde T_a es la temperatura ambiente.

6. La razón a la que se propaga una epidemia en una comunidad es directamente proporcional a la cantidad de residentes que han sido infectados y al número de residentes propensos a la enfermedad que no han sido infectados. Si $Q(t)$ es la cantidad de residentes que ha sido infectado en el instante t, t medido en semanas, la ecuación diferencial que describe la propagación de la epidemia es $\dfrac{dQ}{dt} = kQ(M-Q)$ que corresponde a una ecuación logística. Encuentre $Q(t)$ si la comunidad tiene 2000 personas propensos a la enfermedad, si 500 personas tenían la enfermedad inicialmente y había 855 personas infectadas al final de la primera semana.

7. Resuelva las siguientes EDO Lineales, tengan o no valores iniciales:

   a) $y' = y + e^x$.

   b) ($*$) $y' = \dfrac{-2y}{x} + 3x$.

   c) $(x+1)^2 y' = -3(x+1)y + 2$.

d) $\tan(x)y' - 2y = 2a$.

e) $xy' + y(x\cot(x) + 1) = \cot(x)$.

f) $x^2y' + (x^2 + 2x)y = 1$.

g) $xy' + 2y = 4x^2$, $y(1) = 4$.

h) $xy' - 3y = x^3$, $y(1) = 0$.

i) $(*)$ $xy' + (x-2)y = 3x^3e^{-x}$, $y(1) = 3$. (corregido)

j) $y' - 2y = 4x$, $y(0) = 1$.

k) $y' - 2xy = 1$, $y(a) = b$.

l) $y' + \cos(x)y = \cos(x)$, $y(\pi) = 0$.

m) $(*)$ $x\ln(x)y' + y = 2\ln(x)$.

n) $(x^2+1)y' - 2xy = x^2 + 1$, $y(1) = \pi$.

ñ) $y' + 2xy = 2x$.

o) $y' + \cot(x)y = 3\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$.

p) $x(x+1)y' - y = 2x^2(x+1)$.

q) $xy' - y = x\,\mathrm{sen}(x)$.

8. Un estanque contiene 1000 litros de salmuera con 15Kg de sal disuelta. Agua pura entra al estanque a una razón de 10 litros por minuto. La solución se mantiene perfectamente revuelta todo el tiempo y sale del estanque a la misma velocidad. ¿Cuánta sal hay en el estanque después de t minutos? ¿Después de 20 minutos?

9. En un cierto país hay \$10 mil millones en circulación y cada día \$50 millones pasan por los bancos. El gobierno decide reemplazar los billetes por un modelo nuevo cambiando todos los billetes antiguos que llegan a los bancos cada día. Sea $x(t)$ la cantidad de dinero en circulación en forma de billetes nuevos, con $x(0) = 0$

   a) Formule un modelo matemático que represente la transición de los billetes antiguos a los nuevos. (Encuentre una ecuación diferencial con condiciones iniciales)

   b) Resuelva la ecuación de la parte (a).

   c) ¿Cuánto demorarán los billetes nuevos en constituir el 90 % del total en circulación?

12. Integral de Riemann

12.1. Sumas de Riemann

Sea f función definida y acotada sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ (no necesariamente continua ni positiva).

Definición 12.1. *Una Partición $\mathbb{P}$ de $[a,b]$ es una colección de n subintervalos*

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots[x_{n-1},x_n],$$

de $[a,b]$ tales que

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b.$$

Observación 12.1. *1. La longitud del i-ésimo intervalo $[x_{i-1},x_i]$ es $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$*

2. Si todos los intervalos de la partición tienen igual longitud $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ se habla de **una partición regular***.*

3. Para cada $1\leq i\leq n$, sea $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ un punto arbitrario del intervalo entonces $S=\{c_1,c_2\cdots,c_n\}$ se llama una selección de la partición $\mathbb{P}$.

Definición 12.2. *Sea f función definida y acotada sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, y sea $\mathbb{P}$ una partición de $[a,b]$ y S una selección de $\mathbb{P}$. Entonces* **una suma de Riemann** *para la función f determinada por $\mathbb{P}$ y S es*

$$R=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$$

Observación 12.2. *1. Note que $|f(c_i)|\Delta x_i$ es el área de un rectángulo de ancho Δx_i y altura $|f(c_i)|$, así que una suma de Riemann es sumar o restar áreas de rectángulos.*

2. El punto c_i es un punto arbitrario del subintervalo $[x_{i-1},x_i]$.

Ejemplo 12.1. *Encuentre las sumas de Riemann asociadas a f donde $f(x)=5+x^2$, en $[1,3]$ usando una partición regular y escogiendo en cada subintervalo el borde izquierdo, usando primero $n=6$, y luego con $n\in\mathbb{N}$ genérico.*

Solución:

- Para $n=6$ y usando los bordes izquierdos de los subintervalos, tenemos $\Delta x=\dfrac{3-1}{6}=\dfrac{1}{3}$, y $c_i=x_{i-1}=1+(i-1)\dfrac{1}{3}=\dfrac{i+2}{3}$. Luego

$$c_1=x_0=1 \qquad c_2=x_1=\frac{4}{3}$$
$$c_3=x_2=\frac{5}{3} \qquad c_4=x_3=2$$
$$c_5=x_4=\frac{7}{3} \qquad c_6=x_5=\frac{8}{3}$$

Luego, la suma de Riemann respectiva es

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} f(c_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{i+2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}\left(5+\left(\frac{i+2}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}5+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{i+2}{3}\right)^2 \\
&= 10+\frac{1}{27}\sum_{i=1}^{6}(i+2)^2 = 10+\frac{1}{27}\big(9+16+25+36+49+64\big)
\end{aligned}$$

- Para $n \in \mathbb{N}$ genérico y usando los bordes izquierdos de los subintervalos, tenemos $\Delta x = \dfrac{3-1}{n} = \dfrac{2}{n}$, y $c_i = x_{i-1} = 1+(i-1)\dfrac{2}{n} = \dfrac{n+2i-2}{n}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{n+2i-2}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(5+\left(\frac{n+2i-2}{n}\right)^2\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}5+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+2i-2}{n}\right)^2 \\
&= \frac{2}{n}5n+\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n^2+4i^2+4+4ni-4n-8i) \\
&= 10+\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}n^2+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}ni-\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}n-\frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i \\
&= 10+\frac{2}{n^3}n^3+\frac{8}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{8}{n^3}n+\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{8}{n^3}n^2-\frac{16}{n^3}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{4(14n^2-6n+1)}{3n^2}
\end{aligned}$$

□

12.2. Integral definida

Definición 12.3. *Sea* $\mathbb{P}$ *una partición del intervalo* $[a,b]$*. Se llama* **norma de la partición** $\mathbb{P}$ *al máximo de las longitudes de los subintervalos* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ *de* $\mathbb{P}$ *y se anota* $|\mathbb{P}|$*.*

Definición 12.4. *Sea* f *una función definida y acotada en* $[a,b]$*. Se llama* **integral definida de la función** f **de a a b** *al número real*

$$I = \lim_{|\mathbb{P}|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

siempre que este límite exista sin importar cual selección fue usada en cada suma de Riemann, en cuyo caso se dice que f *es integrable en* $[a,b]$*.*

Notación de Leibniz:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|\mathbb{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

a se llama límite inferior de la integral y
b se llama límite superior de la integral.
El siguiente Teorema lo usaremos pero no lo demostraremos aquí

Teorema 12.1. *f continua en $[a, b]$ entonces f integrable en $[a, b]$.*

Observación 12.3. *En el caso de una función continua en $[a, b]$ y una colección de particiones regulares del intervalo en n subintervalos, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$|\mathbb{P}| \to 0 \iff n \to \infty$$

En el caso de una función continua en $[a, b]$ y una partición regular se tiene que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Observación 12.4. *Vimos que la definición de integral se aplica solamente si $a < b$, pero es conveniente incluir los casos $a = b$ y $a > b$. Se define la integral, para estos casos, como*

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

De las propiedades de los límites se tienen las siguientes propiedades de las integrales:

Proposición 12.1.

1. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$

3. *Si* $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \geq 0$ *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

4. *Si* $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \geq g(x)$ *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$

5. *Sean* $a < c < b$. *Entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

   Según la observación 12.4, cualquiera sea el orden entre a, b y c se cumplirá $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

12.3. Evaluación de integrales: Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), primera parte.

Teorema 12.2. Teorema Fundamental del Cálculo primera parte: *Si g es una primitiva de una función f integrable en $[a,b]$ es decir, si $g'(x) = f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$.*

Idea intuitiva: (debida a Newton) Introduzcamos una función $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $A(x) = \int_a^x f(u)\,du$. Si el incremento de x es Δx entonces el de A es ΔA.

Se tiene que $\Delta A \approx f(x)\Delta x$, es decir, $\dfrac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x)$, de donde $\dfrac{dA}{dx} = lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$. Es decir, $\forall x \in [a,b], A'(x) = f(x)$. Sea $g(x)$ otra primitiva de $f(x)$, en $[a,b]$ es decir $\forall x \in [a,b],\ g'(x) = f(x)$ entonces

$$A(x) = g(x) + C.$$

Como $A(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0,\ A(b) = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) = A(b) - A(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C] = g(b) - g(a).$$

La diferencia $g(b) - g(a)$ se abrevia por $[g(x)]_{x=a}^{x=b}$ o más simple por $[g(x)]_a^b$ o simplemente $g(x)\Big|_a^b$ y asi el Teorema queda

$$\int_a^b f(x)\,dx = [g(x)]_a^b, \text{ si } g' = f \text{ en } [a,b]$$

Con esto tenemos por ejemplo que:

$$1. - \int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$2. - \int_a^b \cos(x)\,dx = [\mathrm{sen}(x)]_a^b = \mathrm{sen}(b) - \mathrm{sen}(a)$$

$$3. - \int_a^b \mathrm{sen}(x)\,dx = [-\cos(x)]_a^b = \cos(a) - \cos(b)$$

$$4. - \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

$$5. - \text{Si } m \leq f(x) \leq M \text{ entonces } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

12.3.1. Sustitución simple

Cuando hay que integrar una función que aparenta ser la derivada por Regla de la Cadena de sus primitivas como en Ejemplo**??**, es decir, cuando es producto y entre sus factores hay una composición, podemos usar el Método de Sustitución Simple, que se basa en lo siguiente:

Teorema 12.3. *Si en algún intervalo* $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)+k,\ k\in\mathbb{R}$ *y* g *es derivable, entonces* $\displaystyle\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big)+k,\ k\in\mathbb{R}$

Demostración. Basta notar que, por Regla de la cadena, $\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$ □

Observación 12.5. *La forma operativa de sustitución simple (o cambio de variable, como también se le conoce) es definir una variable auxiliar* $u = g(x)$*, de modo que, usando la* ***notación diferencial*** $du = g'(x)\,dx$ *(se basa en que* $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$*) y por tanto la sustitución se escribe también como:*

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

con la idea de que la segunda integral sea más simple (más allá del nombre de la variable).

Cuidado, la variable auxiliar no es una respuesta razonable, hay que volver después a la variable original

Ejemplo 12.2. *Calcule* $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\,dx$

<u>Solución</u>:

$$\int \operatorname{sen}(3x)\,dx = \underset{\left(\begin{array}{l} \quad u = 3x \\ \therefore du = 3dx \quad \therefore dx = \dfrac{du}{3}\end{array}\right)}{\int \operatorname{sen}(u)\frac{du}{3}} = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(u)\,du$$

$$= -\frac{\cos(u)}{3} + k = -\frac{\cos(3x)}{3} + k,\ k\in\mathbb{R}$$

□

Observación 12.6. *Note que podemos omitir* $k\in\mathbb{R}$ *cuando entorpezca.*

Observación 12.7. *Al realizar la sustitución o cambio de variable, no debe mezclar variables, es importante.*

Ejemplo 12.3. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^4}dx$

<u>Solución</u>:

$$\int \frac{x}{(x-1)^4}dx = \underset{\begin{pmatrix} u = x-1 & \therefore x = u+1 \\ \therefore du = dx & \end{pmatrix}}{\int \frac{u+1}{u^4}du} = \int u^{-3}\,du + \int u^{-4}\,du$$
$$= \frac{u^{-2}}{-2} + \frac{u^{-3}}{-3} + k = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + k \; k \in \mathbb{R}$$

□

Ejemplo 12.4. *Calcule* $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$

<u>Solución</u>:

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}dx = \underset{\begin{pmatrix} u = \cos(x) \\ \therefore du = -\operatorname{sen}(x)\,dx \end{pmatrix}}{-\int \frac{1}{u}du}$$
$$= -\ln\big(|u|\big) + k = -\ln\big(|\cos(x)|\big) + k,\; k \in \mathbb{R}$$

□

Ejemplo 12.5. *Calcule* $\displaystyle\int 2^x\,dx$

<u>Solución</u>: Recuerde (!) que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene, por definición, $2^x = e^{x\ln(2)}$, por lo cual

$$\int 2^x\,dx = \int e^{x\ln(2)}dx \underset{\begin{pmatrix} u = x\ln(2) & \\ \therefore du = \ln(2)dx & \therefore dx = \frac{du}{\ln(2)} \end{pmatrix}}{=} \int e^u \frac{du}{\ln(2)} = \frac{e^u}{\ln(2)} + k$$
$$= \frac{2^x}{\ln(2)} + k,\; k \in \mathbb{R}$$

□

Ejercicio 12.1. *Compruebe que para cada $a > 0$, $a \neq 1$ se cumple* $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 12.6. *Calcule la siguiente integral indefinida* $\int 6x^3 5^{x^4+7}\,dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int 6x^3 5^{x^4+7}\,dx = &\quad \frac{3}{2}\int 5^u\,du = 3\frac{5^u}{2\ln(5)} + k \\ &\begin{pmatrix} u = x^4+7 & \\ \therefore du = 4x^3\,dx & \therefore \frac{3}{2}du = 6x^3\,dx \end{pmatrix} \\ &= 3\frac{5^{x^4+7}}{2\ln(5)} + k,\ k\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

□

Ejercicio 12.2. *Calcule* $\int \sqrt{3x+1}dx$.

12.3.2. Integración por partes

Teorema 12.4. *Si existen todas las primitivas involucradas, se cumple:*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

Demostración. Se basa en la derivada de un producto de funciones: como $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$, se tiene $f(x)\cdot g'(x) = \big(f(x)\cdot g(x)\big)' - g(x)\cdot f'(x)$, de lo que resulta la igualdad planteada. □

Observación 12.8. *La "fórmula" de integración por partes se escribe, de manera operativa, como*

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

donde $u = f(x)$ *y* $v = g(x)$, *y se usan las diferenciales* $du = f'(x)\,dx$ *y* $dv = g'(x)\,dx$ *lo que se llama "notación diferencial" y tiene una correlación* visual *con* $\frac{du}{dx} = f'(x)$ *y con* $\frac{dv}{dx} = g'(x)$ *respectivamente.*

Ésta es la forma operativa ya que, al enfrentar una integral que sea un producto de funciones, no sabemos a priori que un factor es f *y ni que el otro factor es* g', *y menos conocemos de antemano a* g. *Los ejemplos mostrarán cómo usar (elegir)* u *y* dv.

Pasar de dv *a* v *es* ***sin constante de integración***.

Ejemplo 12.7. *Calcule* $\int x\,\mathrm{sen}(x)dx$

Solución: El *integrando* ya tiene dos factores, x y $\operatorname{sen}(x)$. Podemos escoger $u = x$ con $dv = \operatorname{sen}(x)\,dx$ (la idea es encontrar $v\ldots$) o bien al revés, pero usaremos la primera opción ya que, aunque ambos factores son fáciles de derivar e integrar, como $x' = 1$ se nos simplifica la integral que queda. Observe:

$$\int x\operatorname{sen}(x)dx = \underset{\begin{pmatrix} u = x & \therefore du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(x)\,dx & \therefore v = -\cos(x)\end{pmatrix}}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

□

Observación 12.9. *En el ejemplo anterior había dos factores visibles, pero 1 siempre es un factor a considerar si hiciera falta, como muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 12.8. *Calcule* $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

Solución: Aparentemente hay sólo un factor, $\ln(x)$, pero en verdad 1 es también un factor, pero evidentemente integraremos 1 (en realidad, usaremos $du = dx$) y derivaremos $\ln(x)$, ya que al revés no sirve (compruébelo). Entonces:

$$\int \ln(x)\,dx = \underset{\begin{pmatrix} u = \ln(x) & \therefore du = \dfrac{1}{x} \\ dv = dx & \therefore v = x\end{pmatrix}}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

□

Observación 12.10. *A veces hay que integrar por partes varias veces hasta terminar.*

Ejercicio 12.3. *Calcule* $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x)dx$

Observación 12.11. *Hay casos aparentemente extraños de uso de integración por partes, donde reaparece la integral original, pero en realidad aparece sumado un múltiplo de ella, no la misma. Vea el ejemplo siguiente.*

Ejemplo 12.9. *Calcule* $\displaystyle\int \cos^2(x)\,dx$

Solución:

$$\int \cos^2(x)\,dx = \underset{\begin{pmatrix} u=\cos(x) & \therefore du=-\operatorname{sen}(x)\,dx \\ dv=\cos(x)\,dx & \therefore v=\operatorname{sen}(x)\end{pmatrix}}{\int u\,dv = uv-\int v\,du} = \cos(x)\operatorname{sen}(x) - \int -\operatorname{sen}^2(x)\,dx$$

$$= \cos(x)\operatorname{sen}(x) + \int (1-\cos^2(x))dx = \cos(x)\operatorname{sen}(x) + x - \int \cos^2(x)\,dx$$

y entonces agrupamos las apariciones de $\int \cos^2(x)\,dx$, cuidando de no cometer errores conceptuales (incorporando la constante de integración)

$$2\int \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\operatorname{sen}(x) + x + k,\ \ k\in\mathbb{R}$$

por lo cual obtenemos finalmente

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{x}{2} + k,\ \ k\in\mathbb{R}$$

□

12.3.3. Método de integración por Partes para integrales definidas

Sean f y g funciones con derivadas continuas.
$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$

Ejemplo 12.10. *Calcule* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen}(x)dx$

Solución: Sea $u=x, dv=\operatorname{sen}(x)dx$. Entonces $du=dx$ y $v=-\cos(x)$. Luego

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen}(x)dx &= [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx \\ &= [-x\cos(x)+\operatorname{sen}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \big(-0\cos(0)+\operatorname{sen}(0)\big) = 1\end{aligned}$$

□

12.3.4. Método de sustitución simple para integrales definidas.

Suponga que g es una función con derivada continua en $[a,b]$ y que f función continua en el conjunto $g([a,b])$. Sea $u=g(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

En efecto si F es una primitiva de f se tiene que
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(u)]_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Ejercicio 12.4. *Evalue las siguientes integrales* $\int_1^5 (x^3+7)\,dx$, $\int_1^4 \sqrt{3x+1}\,dx$, $\int_{-1}^3 2|x|\,dx$

Ejercicio 12.5. *Evalue las siguientes integrales* $\int_0^7 x^2\sqrt{x^3+7}\,dx$, $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2-3}}{8x}\,dx$. $\int_0^8 xe^{10x}\,dx$

Ejercicio 12.6. *Evalue las siguientes integrales*

1. $\int_0^3 x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$ *2.* $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}\,dx$ *3.* $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(2x)\cos^3(2x)\,dx$

12.4. Algunas aplicaciones de integral definida

12.4.1. Área bajo una curva

Sea f función continua y positiva en $[a,b]$. Entonces el área A debajo de la gráfica de $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $y=b$ es $A=\int_a^b f(x)\,dx$. si f no es positiva en el intervalo, el área encerrada entre la curva y el eje X es $\int_a^b |f(x)|\,dx$, que a efectos prácticos se subdivide en suma de integrales donde el signo de f sea constante, es decir, se suma la integral cuando $f\geq 0$ y se resta cuando $f\leq 0$.

Ejercicio 12.7. *Calcule el área bajo la curva* $y=1+x$ *en el intervalo* $[-2,5]$.

12.4.2. Area entre curvas o regiones planas con respecto al eje X

Sean f y g funciones continuas tales $f(x)\geq g(x)\ \forall\ x\in[a,b]$. Entonces el área A de la región acotada por las gráfica de $y=f(x)$ e $y=g(x)$ y por las rectas verticales $x=a$ e $x=b$ es $A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$.

12.4.3. Área entre curvas o regiones planas con respecto al eje Y

Sean f y g funciones continuas tales $\forall\, y \in [c,d]\big(f(y) \geq g(y)\big)$. Entonces el área A de la región acotada por las gráfica de $x = f(y)$ e $x = g(y)$ y por las rectas horizontales $y = a$ e $y = b$ es $A = \displaystyle\int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy$.

Ejercicio 12.8. *Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = x^2+1$ e $y = 2x-2$. Haga un dibujo de la región.*

Ejercicio 12.9. *Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4$. Haga un dibujo de la región.*

12.5. Valor promedio de una función y Teorema Fundamental del Cálculo segunda parte

Valor promedio de una función: Sea f función integrable en $[a,b]$. Entonces el valor promedio $\overline{y}$ de $y = f(x)$ en $[a,b]$ es $\overline{y} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Observación 12.12. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe un valor $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}$*

Teorema 12.5 (Teorema Fundamental del Cálculo segunda parte)**.** *Sea f función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Se define una función F en $[a,b]$ por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. para cada $x \in [a,b]$. Entonces para cada $x \in [a,b]$ se cumple $F'(x) = f(x)$.*

Observación 12.13. *Esta parte del TFC dice que toda función continua en un intervalo tiene primitivas. Pero cuidado, no dice que se puedan encontrar explícitamente esas primitivas; se ha demostrado rigurosamente que no hay combinación elemental de funciones simples (como las que se ven en estos cursos) que exprese las primitivas de $\displaystyle\int e^{x^2} dx$, $\displaystyle\int \cos(x^2) dx$ y otras similares.*

Demostración. Tenemos que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right)$$

Pero

$$\int_a^{x+h} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Así
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$
Usando el valor promedio de f en $[x, x+h]$ se tiene que
$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(\overline{t}) \text{ para algún } \overline{t} \in [x, x+h]$$
Notemos que $\overline{t} \to x$ cuando $h \to 0$ y como f es continua, se tiene que
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = \lim_{\overline{t}\to x} f(\overline{t}) = f(x).$$
□

Ejemplo 12.11. *Derive la función* $h(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} t^3 sen(t)\, dt$,

Solución: Observamos que $h(x) = F(g(x))$, donde $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^3 sen(t)\, dt, g(u) = u^2$.
Luego $F'(a) = a^3 sen(a)$ y por lo tanto
$h'(x) = (F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = (x^2)^3 sen(x^2) 2x = 2x^6 x sen(x^2) = 2x^7 sen(x^2)$. □

12.6. Guía 5

Sumas de Riemann e integral definida

1. Calcular la suma de Riemann con partición regular del intervalo dado en n subintervalos iguales. Use i) $c_i = x_i$, el borde derecho del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. ii) $c_i = x_{i-1}$, el borde izquierdo del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

   a) $f(x) = 3x - 4$ en el intervalo $[2, 5]$ *b*) $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$.

   c) $f(x) = x^2 - x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$ *d*) $f(x) = x^2 - x^3$ en el intervalo $[-1, 0]$.

2. Evalúe las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_1^4 (x^3 + 2)\, dx$

   b) $\displaystyle\int_1^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

   c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{x^2 + 1}{x^2}\, dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 - \operatorname{sen}(t))dt$

   e) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^3 + 3}{x^2}\right) dx$

   f) $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{x}(x - 4)\, dx$

   g) $\displaystyle\int_{-1}^2 |x^3 - x|\, dx$

   h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\, dx$

   i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}(3x)\, dx$

   j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\, dx$

   k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\operatorname{sen}(t)\big)^{\frac{3}{2}} \cos(t)dt$

   l) $\displaystyle\int_0^8 t(t+1)^{\frac{1}{2}} dt.$

   m) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x^2 - 1|\, dx$

   n) $\displaystyle\int_{-2}^0 xe^{-x}\, dx$

   ñ) $\displaystyle\int_1^6 (4t + 12)^5 dt$

   o) $\displaystyle\int_1^9 \frac{(3x + 4)^2}{\sqrt{x}} dx$

   p) $\displaystyle\int_0^1 \pi x^3\sqrt{1 + 9x^4}\, dx$

   q) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi y\sqrt{1 + 4y^2}\, dy$

   r) $\displaystyle\int_{-1}^1 \pi(1 - 2y^2 + y^4)\, dy$

   s) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2\pi y}{\sqrt{1 + y^2}}\, dy$

   t) $\displaystyle\int_0^{\pi} 5x\ \operatorname{sen}(2x)\, dx$

   u) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(9x^2 + 4)^2}\, dx$

Aplicaciones de la integral definida

1. Calcule, en cada caso, el área entre la curva y el intervalo del eje horizontal y dibuje la región del plano.

   a) $y = \tan(x)$, $\dfrac{-\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$

   b) $y = \operatorname{sen}(2x)$, $\dfrac{-\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$

   c) $y = x^{\frac{2}{3}}$, $0 \leq x \leq 3$

   d) $y = 2 - x^2$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

   e) $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$

   f) $y = 2\operatorname{sen}(x)$, $\dfrac{-\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$

g) $y = 2\operatorname{sen}(2x),\ \dfrac{-\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$

h) $y = x^3 - 9x,\ -4 \leq x \leq 4$

i) $f(x) = (3-x)\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 3$

j) $g(x) = \tan(x),\ \dfrac{-\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}$

2. Calcule, en cada caso, el área encerrada entre las curvas y dibuje la región del plano.

   a) $y = 2 - x^2$ e $y = x$

   b) $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$

   c) $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = -x^2 + 2x + 3$

   d) $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$

   e) $y = (x-1)^3$ e $y = x - 1$

   f) $y = x^4 - 2x^2$ e $y = 2x^2$

3. Use una integral para demostrar que el área de un cuarto de circunferencia de radio r es $\dfrac{\pi}{4}r^2$.

4. El teorema fundamental del cálculo parece implicar que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{+1} = -2$, en aparente contradicción con el hecho que $\dfrac{1}{x^2}$ es positivo para cada $x \neq 0$. ¿ Qué está mal en este razonamiento ?

5. Derive respecto de x:

   a) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$

   b) $\displaystyle\int_0^{3x} e^{t^2}dt$

   c) $\displaystyle\int_{x+1}^{x^3} \sqrt{e^t + t^4}\,dt$

   d) $\displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^3}dt$

   e) $\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} \sqrt{1-t^2}dt$

   f) $\displaystyle\int_{x^2+1}^{x^4+2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt$

6. Cierto día la temperatura t horas después de la medianoche está dada por la fórmula $T(t) = 80 + 10\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(t-10)\right)$. ¿Cúal es la temperatura promedio $\overline{T}$ entre el medio día y las 6 de la tarde ?

7. Calcule numéricamente usando el método de trapezoide (se enseñará en ayudantía) para cada una de las integrales usando el número indicado de subdivisiones.

   a) $\displaystyle\int_1^4 (2x-3)^3\,dx\ (n=3)$

   b) $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{\ln(x)}{x}\,dx\ (n=5)$

   c) $\displaystyle\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx\ (n=4)$

   d) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx(n=4)$

   e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx\ (n=3)$

   f) $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}\,dx\ (n=4)$

8. Suponga que un tanque de agua de 5000 litros de agua tarda 10 minutos en vaciarse y que después de t minutos, la cantidad de agua que queda en el estanque es $V(t) = 50(10-t^2)^2$ litros. ¿ Cúal es la cantidad promedio $\overline{V(t)}$ de agua del estanque durante el tiempo en que se vacia ?

12.7. Funciones definidas por integrales.

La integral de Riemann permite definir nuevas funciones:

Ejemplo 12.12. Función Logaritmo Natural *Se define la función*

$$ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ \ por \ ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

llamada logaritmo natural y se tiene de inmediato que $ln(1) = 0$, $(ln(x))' = \frac{1}{x}$, *luego es una función creciente y como* $(ln(x))'' = -\frac{1}{x^2}$, *es cóncava hacia abajo. Además* $\lim\limits_{x\to\infty} ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$. *Las otras propiedades ya se vieron antes.*

Ejemplo 12.13 (Funciones trigonométricas inversas)**.** *Sea* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$. *Como* $\frac{1}{1+t^2}$ *es continua en* $\mathbb{R}$, *el dominio de* g *efectivamente es* $\mathbb{R}$ *y además* g *es derivable con*

$$g'(x) = \left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt\right)' = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

Luego g *es creciente estricta e inyectiva y además se cumple que, para todo* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *(tangente no es continua en* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}(g(\tan(x)))' = g'(\tan(x)) \cdot \tan'(x) &= \frac{1}{1 + (\tan(x))^2} \cdot \sec^2(x) \\ &= \frac{1}{\sec^2(x)} \cdot \sec^2(x) = 1\end{aligned}$$

Luego existe una constante $C \in \mathbb{R}$ *tal que* $g(\tan(x)) = x + C$, *pero evaluando en* $x = 0$ *se obtiene*

$$C = 0 + C = g(\tan(0)) = g(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 0$$

Luego, para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *se cumple* $g(\tan(x)) = x$ *de modo que* g *sería una inversa de tangente, de modo que se tiene*

$$\text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

De forma similar se tiene que

$$\text{Arcsen}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

13. Nociones de matemática discreta

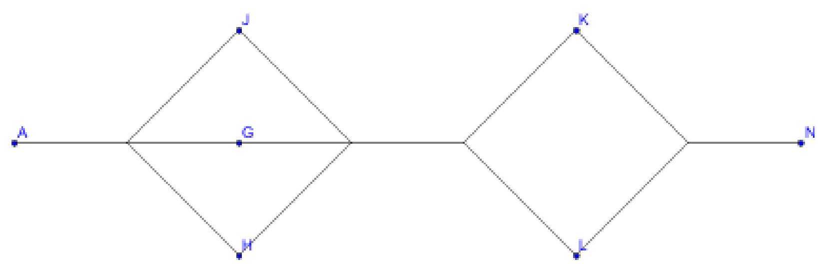
Esta sección trata de algunos temas vinculados con formas de contar permutaciones, arreglos y combinaciones mediante factoriales, algo de probabilidades, sumatoria y binomio, un poco de Inducción Matemática, todos elementos que pueden adquirir importancia propia, como probabilidades, o servir de herramienta para la expresión y cálculo de valores que provienen de una cantidad finita de valores.

13.1. Combinatoria

Se trata de contar todos los casos posibles en que ciertos sucesos pueden ocurrir, y se basa en dos principios bastante simples, que se pueden comprender con un ejemplo:

Proposición 13.1 (Principio aditivo)**.** *Si dos sucesos que conforman un suceso mayor no se influyen mutuamente, la cantidad de veces que cada cual ocurre son sumadas para calcular su aporte conjunto al conteo de casos del suceso mayor.*

Proposición 13.2 (Principio multiplicativo)**.** *Si dos sucesos que conforman un suceso mayor se influyen en secuencia, la cantidad de veces que cada cual ocurre son multiplicadas para calcular su aporte conjunto al conteo de casos del suceso mayor.*



Ejemplo 13.1.

La figura muestra posibles caminos para ir de A hasta N. Asumiendo caminos sin retroceso, entonces

1. *En la primera etapa se puede pasar por J, G o H, los que son independientes y se suman sus posibilidades: son 3.*

2. *En la segunda etapa se puede pasar por K o L, que son independientes y se suman sus posibilidades: son 2.*

3. *Habiendo 3 posibilidades y luego dos posibilidades, un camino concreto de A hasta N toma alguna de las 3 posibilidades (J,G,H) y luego, en secuencia, alguna de las 2 posibilidades (L,K), por lo que en total hay 6 posibles caminos de A hasta N.*

Proposición 13.3. *Dados $n \in \mathbb{N}$ elementos diferentes, la cantidad de listas (donde importa el orden) que se pueden formar de largo k, usando los n elementos, si se pueden repetir, es n^k.*

Proposición 13.4 (Permutaciones)**.** *La cantidad de diferentes reordenamientos sin repeticiones (o "permutaciones") de $n \in \mathbb{N}$ objetos es $n!$, donde $n!$ es el "factorial de n", dado por $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Adicionalmente se define $0! = 1$.*

Proposición 13.5 (Arreglos)**.** *La cantidad de listas ordenadas de $k \in \mathbb{N}$ elementos tomados de entre $n \in \mathbb{N}$ elementos, con $n \geq k$ (arreglos de largo k) es $\dfrac{n!}{(n-k)!}$*

Proposición 13.6 (Combinaciones)**.** *La cantidad de conjuntos (donde no importa el orden) de $k \in \mathbb{N}$ elementos distintos tomados de entre $n \in \mathbb{N}$ elementos, con $n \geq k$ (combinaciones de k elementos) es $\dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Se denota $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.*

Proposición 13.7. *Dados $n, k \in \mathbb{N}$, con $0 \leq k \leq n$, se cumplen:*

1. $\dbinom{n}{0} = 1 = \dbinom{n}{n}$
2. $\dbinom{n}{1} = n = \dbinom{n}{n-1}$
3. $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$
4. *Si $k > 0$, entonces $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$ (triángulo de Pascal)*

13.2. Teorema del Binomio de Newton

Proposición 13.8. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

13.3. Guía 6

Combinatoria

1. ¿Cuántos números diferentes se pueden formar usando los dígitos 2, 4, 7, y 9?
2. ¿Cuántos números diferentes se pueden formar usando los dígitos 2, 4, 7, y 9, si cada dígito se usa una sola vez en cada número?
3. Si en un departamento hay 15 profesores y 72 alumnos, y cada alumno debe tomar a un único tutor, ¿cuántas parejas alumno-tutor se podrán formar?
4. ¿De cuántas formas pueden formar fila 15 personas?
5. ¿De cuántas formas distintas pueden serntarse 15 alumnos en una sala con 40 asientos?
6. ¿De cuántas formas distintas pueden quedar asientos vacíos si se ocupan 15 asientos de una sala de 40 asientos?
7. Se encuentra un grupo de estudiantes en un congreso, y se producen 15 saludos entre ellos; si cada uo saludó a todos los demás, ¿cuántos estudiantes eran?. En el mismo congreso, hubo 2485 saludos el primer día; si se asume que cada persona saludó a todos los demás, ¿cuántos asistentes había?.
8. De 21 asistentes a un trabajo de campo, deben cocinar 3 de ellos por turnos. ¿Cuántas comisiones para cocinar se pueden formar?
9. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 libros en un estante si dos de ellos deben quedar juntos?.
10. En una asamblea deben escogerse 9 representantes, tres de entre 1500 estudiantes, cuatro entre 200 académicos, y dos entre 50 fucionarios. ¿De cuántas formas pueden elegirse los representantes?.
11. Un grupo de cinco hombres y siete mujeres forma una comisión que debe formarse con 2 de los hombres y 3 de las mujeres. Calcula por separado cada caso:
    a) Cualquiera puede pertenecer a la comisión.
    b) Una mujer determinada debe pertenecer a la comisión.
    c) Dos de los hombres no pueden estar en la comisión.

Teorema del Binomio de Newton

1. Encuentre el coeficiente numérico que acompaña a la potencia de x indicada al desarrollar y simplificar por Teorema del Binomio (no se preocupe de la aritmética, sino de expresar en términos de operaciones básicas o de coeficientes binomiales):

   a) Coeficiente numérico de x^6 en $(1+x)^9$

   b) Coeficiente numérico de x^{10} en $(x^2+2)^9$

   c) Coeficiente numérico de x^{11} en $(x^2+1)^9$

   d) Coeficiente numérico de x^{-7} en $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{13}$

   e) Coeficiente numérico de x^{-6} en $\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{21}$

   f) Coeficiente numérico de x^{21} en $\left(2x^4-\dfrac{5}{x^2}\right)^{35}$

2. Sin sumar los términos, sino buscando formar el desarrollo de algún binomio, determine el valor de la expresión $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}4^k$

3. Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}=0$ ¿ Cuánto vale x?

4. Determine el coeficiente de x^{-11} en el desarrollo de

$$\left(2x-\frac{3}{x^2}\right)^{22}$$

5. Determine el coeficiente de x^{-13} en el desarrollo de

$$\left(3x-\frac{4}{x^2}\right)^{23}$$

6. Determine el coeficiente de x^{-12} en el desarrollo de

$$\left(5x-\frac{2}{x^2}\right)^{21}$$

13.4. Sumatorias

La suma de los cuadrados de los n primeros números naturales se escribe

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Observe que el término general de esta suma es de la forma i^2 y se obtiene cada sumando dando a i los valores $1, 2, 3, \cdots, n$. Existe un símbolo que permite escribir sumas en forma abreviada, llamado *símbolo de sumatoria* que consiste en la letra griega $\sum$ Usando este símbolo la suma anterior se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

se lee *suma de i^2 desde 1 hasta n*

Se subentiende que si a_i es un número u otro tipo de objeto matemático que se asigna a i, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ quiere decir que $i \in \mathbb{Z}$, con $1 \leq i \leq n$, y donde

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Del mismo modo, definimos para $p, q \in \mathbb{Z}$ con $p \leq q$

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$$

Es claro que en lugar de la letra i se puede usar otra letra cualesquiera. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2$. Las letras i, j, k que se usan para tal efecto se llaman índices.

Otras formas de usar la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{6} 2^i = 2 + 2^2 + \cdots + 2^5$$

Proposición 13.9. *Sean a_i, b_j números reales para $j \in \mathbb{Z}$, y sean $p < n$ con $p, n \in \mathbb{Z}$. Entonces:*

1. $\displaystyle\sum_{i=p}^{p} a_i = a_p$

2. $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} 1 = (n - p) + 1$

3. $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + \sum_{i=(p+1)}^{n} a_i = \left(\sum_{i=p}^{n-1} a_i\right) + a_n$

4. $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=p}^{n} a_i + \sum_{i=p}^{n} b_i$

5. $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} (ca_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

9. $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_p$ *(propiedad telescópica)*

10. Si $r \neq 1$ *entonces para todos* $p < q$ *en* $\mathbb{Z}_0^+$ *se cumple* $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} r^i = \frac{r^p - r^{q+1}}{1-r}$ *(suma geométrica)*

11. Para todo $q \in \mathbb{Z}^+$ $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=p+q}^{n+q} a_{i-q}$ *(desplazamiento de índices)*

Ejercicio 13.1. *Use propiedades para demostrar*

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2. \textit{ Sugerencia } 2i - 1 = i^2 - (i-1)^2.$$

Ejercicio 13.2. *Pruebe que para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

13.5. Guía 7

1. Use el símbolo $\sum$ para abreviar las sumas que aparecen y calcule

   a) $(3+5)+(6+5)+(9+5)+\cdots+(3\cdot 32+5)$

   b) $(*)\ \frac{6}{2}+\frac{11}{2}+\frac{16}{2}+\cdots+\frac{151}{2}$

   c) $\frac{2+1}{5}+\frac{4+1}{5}+\frac{6+1}{5}+\cdots+\frac{2n+1}{5}$

   d) $(*)\frac{4}{5}+2+\frac{28}{5}+\cdots\frac{3^{44}+1}{5}$

   e) $\frac{28}{10^2}+\frac{28}{10^3}+\frac{28}{10^5}+\frac{28}{10^7}+\frac{28}{10^9}+\frac{28}{10^{11}}+\frac{28}{10^{13}}$

   f) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$. Sugerencia $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

2. Calcule

   a) $(*)\ \sum_{k=1}^{10} 2k(k+1)$

   b) $\sum_{n=4}^{121}(3n+2)^2$

   c) $(*)\ \sum_{i=k}^{2k}\frac{4i-1}{7},\ k\in\mathbb{N}$

   d) $\sum_{k=1}^{n}7(k-5)^2$

   e) $(*)\ \sum_{k=5}^{n}k^3$

   f) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$

   g) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}$

   h) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

   i) $(*)\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3$

   j) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

   k) $(*)\ \sum_{j=2} n\left(\frac{5j}{2}+\frac{2^j}{5}\right)$

   l) $\sum_{i=10}^{n}\left(i(i+3)+\frac{4}{7^i}\right)^2$

14. Integrales Impropias

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existe si f es continua en $[a, b]$.
Las Integrales Impropias son de dos tipos:

1. El intervalo de integración de la forma $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, +\infty[$

2. El integrando tiene una asíntota vertical en ese punto, es decir, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$.

Definición 14.1 (Integrales impropias)**.** *1. Intervalo no acotado:*

a) *Si f es continua en $[a, +\infty[$, definimos*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx,$$

si este límite existe.

b) *Si f es continua en $]-\infty, b]$, definimos*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx,$$

si este límite existe.

c) *Si f es continua en $]-\infty, +\infty[$ definimos*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real, si ambos límites existen.

2. Asíntota vertical o función no continua en un punto:

a) *Si f es continua en $[a, b[$ definimos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe.

b) *Si f es continua en $]a, b]$ definimos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe.

c) *Si f es continua en $[a,b]$ salvo en un punto $c \in (a,b)$ donde f tiene una discontinuidad, definimos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

si ambos límites existen.

3. *Si el límite que define la integral impropia existe, se dice que* **la integral impropia converge** *al valor del límite. En caso contrario se dice que* **la integral impropia diverge** *o que no converge (algunos autores dicen que diverge si el límite es ∞ o es $-\infty$).*

Ejemplo 14.1. *Analice:*

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

<u>**Solución**</u>**:**

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-3} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

   Luego la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge a $\dfrac{1}{2}$.

2.
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\big(-2\sqrt{1-x}\big)_t^0\\ &= \lim_{t\to-\infty}(2\sqrt{1-t}-2) = +\infty\end{aligned}$$

   Luego la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ diverge.

3.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{s\to-\infty} \int_{s}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{s\to-\infty} [\mathrm{Arctan}(x)]_s^0 + \lim_{t\to\infty} [\mathrm{Arctan}(x)]_0^t \\
&= \lim_{s\to-\infty} [\mathrm{Arctan}(0) - \mathrm{Arctan}(s)] + \lim_{t\to\infty} [\mathrm{Arctan}(t) - \mathrm{Arctan}(0)] \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Luego la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ converge a π.

$\square$

Ejemplo 14.2. *Analice la integral impropia* $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

<u>**Solución**</u>**:**

$$\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx &= \lim_{t\to(\frac{1}{2})^-} \int_0^{t} \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx \\
&= \lim_{t\to(\frac{1}{2})^-} \left[\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{3}}\right]_0^t \\
&= \lim_{t\to(\frac{1}{2})^-} \frac{3}{2}\left[(2t-1)^{\frac{1}{3}} - (-1)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx &= \lim_{t\to(\frac{1}{2})^+} \int_t^{2} \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx \\
&= \lim_{t\to(\frac{1}{2})^+} \left[\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{3}}\right]_t^2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

Luego $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3}$ y así, esta integral converge. $\square$

14.1. Guía 8

Integrales impropias

1.

2. $(*)$ Considere la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, con $p \in \mathbb{R}$. Pruebe que:

   i) Si $p \leq 1$ entonces la integral diverge.

   ii) Si $p > 1$ entonces la integral converge.

3. i) Pruebe que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ converge.

   ii) ¿Existe $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$?

4. Averigüe si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. Evalúelas si es posible.

   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen}^2(x)\,dx$

   b) $(*)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^{9} \frac{1}{(9-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

   e) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

   f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

   g) $(*)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} cos(x)e^{-sen(x)}\,dx$

   h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

   i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$

5. $(*)$ i) ¿Es correcto escribir $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$?

   ii) Pruebe que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$ diverge pero $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x^3\,dx = 0$.

6. Averigüe si las siguientes integrales impropias convergen o divergen.

   a) $(*)$ $\displaystyle\int_0^{1} x\ln(4x)\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_5^{10} \frac{2}{\sqrt{x-5}}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \tan(x)\,dx$

7. Averigüe si las siguientes integrales impropias convergen o divergen.

   a) $(*)$ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{3}{e^x}\,dx$

   c) $(*)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

8. Averigüe si las siguientes integrales impropias convergen o divergen comparándolas cos integrales impropias conocidas

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{37x^3+1}}\,dx$ *d*) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+\cos(x)}{x^5}\,dx$

9. Utilice criterio de comparación directo o de comparación en el límite para analizar la convergencia de:

   a) (∗) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4(1+x^5)}\,dx$ (sugerencia: compare directamente con $\dfrac{1}{x^4}$ o en el límite con $\dfrac{1}{x^9}$)

   b) (∗) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ (sugerencia: compare directamente con e^{-x})

   c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}\,-1}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2\ln(x+1)}\,dx$

   e) (∗) Averigüe sobre el método de L'Hôpital para calcular límites y úselo junto al criterio de comparación en el límite para analizar la convergencia de $\displaystyle\int_1^{\infty} x^3 e^{-x}\,dx$

   f) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^6+x}}\,dx$

   g) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

   h) $\displaystyle\int_0^{1} x^5 e^{-x}\,dx$

Apéndices

A. Nociones de conjuntos, sus propiedades y operaciones

1. Un conjunto es una colección de objetos donde sólo importa qué objetos pertenecen a él. Si p es un objeto y D es un conjunto, escribimos $p \in D$ como abreviatura de la afirmación "p pertenece a D" (eso puede ser verdadero o no según el caso). Para abreviar la afirmación de que p no pertenece a D, usamos $p \notin D$ (nuevamente eso es verdadero o falso según el caso).

2. Entonces dos conjuntos A y B son iguales, es decir, A y B representan al mismo conjunto, ssi A y B tienen exactamente los mismos elementos.

3. Se usan llaves "$\{$" y "$\}$" para mostrar conjuntos. Por ejemplo, $\{3, 7\}$ es el conjunto que tiene sólo a dos objetos, el 3 y el 7, es decir se cumple $3 \in \{3, 7\}$ y $7 \in \{3, 7\}$, y si p es cualquier objeto distinto de 3 y de 7, se cumple $p \notin \{3, 7\}$.

4. Por la igualdad de conjuntos, se cumple $\{4, 2, 2\} = \{4, 2\} = \{2, 4\}$, donde la primera igualdad ocurre porque al mencionar los elementos del conjunto, la repetición de 2 no influye en que pertenezca ni deja de pertenecer por mencionarlo dos veces; la segunda igualdad ocurre porque lo que importa es qué objetos pertenecen, no en qué orden menciono a esos objetos.

5. No confunda $\{1\}$ con 1 ni con (1): las llaves "$\{$" y "$\}$" denotan a un conjunto, que no es lo mismo que el o los elementos que tenga.

6. Para conjuntos B y D, decimos "B es subconjunto de D" cuando todo elemento de B es también elemento de D, y se abrevia $B \subseteq D$. Ese símbolo, "$\subseteq$", se aplica a conjuntos y no a otras cosas. A veces se dice que B "contiene" a A si $A \subseteq B$, pero no quiere decir que A sea un elemento de B.

7. Note que $A \subseteq A$, porque es verdad que todo objeto de A también está en A.

8. Una forma de asegurar que dos conjuntos A y B son iguales es asegurarse de que $A \subseteq B$ (todo elemento de A está en B) y de que $B \subseteq A$ (B no tiene elementos extra por sobre los de A, porque todo elemento de B está también en A).

9. Cuidado: en algunos textos se usa $B \subset D$ para decir que B es subconjunto de D, pero otros usan $B \subset D$ para decir que B es subconjunto de D pero que no son iguales, lo que se conoce como "subconjunto propio".

10. Si con A es un conjunto y $\alpha(x)$ es una afirmación respecto de x, entonces la expresión $\{x \in A \mid \alpha(x)\}$ abrevia al subconjunto de A formado por sus elementos que hacen verdadera a $\alpha(x)$.

11. En particular, $\{x \in A \mid x \neq x\}$ es un conjunto, es subconjunto de A, pero no tiene elementos: se llama conjunto vacío, denotado $\varnothing$ o también $\emptyset$, y no depende de A. Es el único conjunto sin elementos.

12. Dados dos conjuntos A y B, existe un único conjunto que tiene a los elementos que A y B tienen en común, es decir, los elementos de ambos a la vez: se llama "intersección de A y B" y se denota $A \cap B$.

13. Dados dos conjuntos A y B, existe un único conjunto que tiene a los elementos que están en alguno de los dos (o en ambos), es decir, tanto a los elementos de A como a los elementos de B y ninguno más: se llama "unión de A y B" y se denota $A \cup B$.

14. Dados dos conjuntos A y B, existe un único conjunto que tiene a los elementos que están en A pero no en B: se llama "resta de A y B" y se denota $A \setminus B$ (o simplemente $A - B$). Note que si $p \in B$ y $p \notin A$, entonces $p \notin (A \setminus B)$ (tampoco $-p \in (A \setminus B)$ en general).

15. Recuerde la notación de intervalos de números reales, donde $a < b$:

    - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
    - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
    - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
    - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
    - $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
    - $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
    - $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
    - $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

B. Simbología lógico-matemática

En lo que sigue vamos a utilizar la siguiente simbología para representar y manipular afirmaciones matemáticas tomando en cuenta su verdad (si son ciertas) y su falsedad (si no son ciertas), es decir, su *valor de verdad*:

Definición B.1. *Sean p y q dos afirmaciones matemáticas, sea A un conjunto de objetos matemáticos, y sea x una variable sobre ese conjunto* [8] *Definimos:*

- *$(p \wedge q)$ se lee "p y q", y representa a la afirmación "p y q son ambas verdaderas" y es verdad en tal caso, siendo falsa si cualquiera de ellas es falsa.*

- *$(p \vee q)$ se lee "p o q", y representa a la afirmación "algunas de las afirmaciones p y q es verdadera" y es verdad en tal caso, siendo falsa si ambas son falsas.*

- *$\neg p$ se lee "no p", y representa a la afirmación que niega la verdad de p, siendo verdadera cuando p es falsa, y falsa cuando p es verdadera.*

[8] Que sea una variable sobre ese conjunto quiere decir que representa de modo genérico a los objetos de tal conjunto.

- $(p \Rightarrow q)$ *se lee "p implica q"* [9]*, y representa a la afirmación "la verdad de p obliga a la verdad de q" y es verdad en tal caso, siendo falsa si p es verdadera pero q falsa.*
- $(p \Leftrightarrow q)$ *se lee "p si y sólo si q"* [10]*, y representa a la afirmación " p y q son ambas verdaderas, o ambas falsas" y es verdad en tal caso, siendo falsa si p y q no tienen igual valor de verdad. Se abrevia también como* p ssi q *(ssi:* **s***í y* **s***ólo* **s***i)*
- $\forall\, x \in A\ \big(p(x)\big)$ *se lee "para todo x en A se cumple $p(x)$" y es verdad en tal caso, siendo falsa en caso de haber uno o más elementos x en A que hagan falsa a $p(x)$.*
- $\exists\, x \in A\ \big(p(x)\big)$ *se lee "existe x en A que cumple $p(x)$" y es verdad en tal caso, siendo falsa en caso de no haya elementos x en A que hagan verdadera a $p(x)$.*
- $\exists!\, x \in A\ \big(p(x)\big)$ *se lee "existe un único x en A que cumple $p(x)$" y es verdad en tal caso, siendo falsa en caso de no haya elementos x en A que hagan verdadera a $p(x)$ o que haya más de uno que la haga verdadera.*
- *Para conjuntos B y D, decimos "B es subconjunto de D" cuando todo elemento de B es también elemento de D, y se abrevia $B \subseteq D$*
- *La expresión $\{x \in A \mid \alpha(x)\}$, con A un conjunto y $\alpha(x)$ una condición respecto de (lo que denota) x, representa al conjunto de aquellos elementos de A que cumplen $\alpha(x)$.*

Observación B.1. *Para p y q afirmaciones se cumplen, entre otras, las siguientes equivalencias lógicas, esto es, equivalencias que no dependen de a qué se refieren las afirmaciones sino que dependen de la estructura de conectivos o cuantificadores usados:*

- $(p \Leftrightarrow q)$ *ssi* $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big)$
- $(p \Rightarrow q)$ *ssi* $(\neg p \vee q)$
- $(p \Rightarrow q)$ *ssi* $(\neg q \Rightarrow \neg p)$
- $\neg(p \vee q)$ *ssi* $(\neg p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \wedge q)$ *ssi* $(\neg p \vee \neg q)$

También se tiene que $(p \vee \neg p)$ es siempre verdadera, es decir, es una Tautología*, mientras $(p \wedge \neg p)$ es siempre falsa, es decir, es una* Contradicción*.*

Si $p(x)$ es afirmación respecto de x y A es un conjunto, entonces se cumplen

1. $\neg\exists x \in A\big(p(x)\big) \equiv \forall x \in A\big(\neg p(x)\big)$
2. $\neg\forall x \in A\big(p(x)\big) \equiv \exists x \in A\big(\neg p(x)\big)$

Si $\alpha(x, y)$ es una afirmación respecto de dos objetos x e y con $x \in A$ e $y \in B$, entonces

1. $\forall x \in A \exists y \in B\ (\alpha(x, y))$ *significa que para cualquier elemento $p \in A$ se cumplirá $\exists y \in B\ (\alpha(p, y))$, es decir, "cada $x \in A$ tiene algún $y \in B$ para él, que hace cierta a $\alpha(x, y)$"*

[9] También se lee "si p entonces q", o también "q cuando p"
[10] También se lee "p es equivalente a q", o también "q exactamente cuando p"

2. $\exists x \in A \forall y \in B\,(\alpha(x,y))$ *significa que hay algún elemento* $p \in A$ *para el cual se cumple* $\forall y \in B\,(\alpha(p,y))$, *es decir, "hay algún elemento* $x \in A$ *que con cualquier* $y \in B$ *hará cierta a* $\alpha(x,y)$*"*