1. Sea $u'' + p_1(t)u = 0$ y $v'' + p_2(t)v = 0$ con $p_2(t) < p_1(t)$ en (a, b). Suponga que $u(a) = v(a) = 0$ y $u'(a) = v'(a) = c > 0$. Muestre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $v(t) > u(t)$ en $(a, a + \varepsilon)$.

Solución. Ya que $u(a) = v(a) = 0$ y $u'(a) = v'(a) = 0$ entonces existe $\xi > 0$ tal que $u(t), v(t) > 0$ para $t \in (a, a+\xi)$. Notemos que

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v^2(t)}$$

Tenemos

$$u'' + p_1(t)u = 0 \quad / \cdot v$$

$$u''v + p_1(t)uv = 0$$

$$\int_a^t u''v + p_1(s)uv\, ds = 0$$

$$\int_a^t u''v\, ds + \int_a^t p_1(s)uv\, ds = 0$$

$$u'v\Big|_a^t - \int_a^t u'v'\, ds + \int_a^t p_1(s)uv\, ds = 0$$

$$u'v = \int_a^t u'v'\, ds - \int_a^t p_1(s)uv\, ds$$

De forma similar se obtiene

$$uv' = \int_a^t u'v'\, ds - \int_a^t p_2(s)uv\, ds$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(t) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = -\frac{1}{v^2}\int_a^t \left(p_1(s) - p_2(s)\right) uv\, ds < 0$$

es decir $\left(\frac{u}{v}\right)(t)$ es decreciente en $(a, a+\xi)$. Por lo tanto para $s, t \in (a, a+\xi)$ tal que $s < t$ se tiene

$$\left(\frac{u}{v}\right)(s) > \left(\frac{u}{v}\right)(t)$$

Cuando $s \to a$ nos da

$$1 > \left(\frac{u}{v}\right)(t) \Longrightarrow v(t) > u(t) \quad \text{para } t \in (a, a+\varepsilon_1)$$

2. Verificar que $(0,0)$ es un punto crítico simple para cada uno de estos sistemas y determinar su naturaleza y sus propiedades de estabilidad:

$$a) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - 2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + 3y^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y - 3x^2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 4y + y\sin(x) \end{cases}$$

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x+y-2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x+y+3y^2 \end{cases}$

Primero verificamos que $(0,0)$ es punto critico

$$F(0,0) = 0+0-2\cdot 0 = 0$$

$$G(0,0) = -2\cdot 0 + 0 + 3\cdot 0 = 0$$

por lo tanto $(0,0)$ es critico. Para ver si es simple notemos que

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1-2y & 1-2x \\ -2 & 1+6y \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$|J_{(0,0)}| = 1+2 = 3 \neq 0$ por lo tanto $(0,0)$ es simple.

Como $(0,0)$ es punto critico simple del SN2A entonces la naturaleza del punto critico es similar cuando el sistema es lineal, entonces debemos analizar

$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -2x+y \end{cases}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\, i$$

$\therefore$ $(0,0)$ es un foco inestable

b) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y - 3x^2 y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 4y + y\sin(x) \end{cases}$$

Primero verificamos que $(0,0)$ es punto critico

$$F(0,0) = 0 + 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$G(0,0) = 0 - 0 - 0 \cdot \sin(0) = 0$$

por lo tanto $(0,0)$ es critico. Para ver si es simple notemos que

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -1-6xy & -1-3x^2 \\ -2-y\cos(x) & -4+\sin(x) \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - (2) = 2 \neq 0$ por lo tanto $(0,0)$ es simple.

Como $(0,0)$ es punto crítico simple del SN2A entonces la naturaleza del punto crítico es similar cuando el sistema es lineal, entonces debemos analizar

$$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$$

• $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+4) - 2 \cdot 1 = \lambda^2 + \lambda + 4\lambda + 4 - 2 = \lambda^2 + 5\lambda + 2$

Luego $\lambda = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{25}$

Sea $\lambda_1 = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2} < 0$ y $\lambda_2 = \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2} < 0$

$\therefore$ $(0,0)$ es un nodo estable.

3. En ecología, el modelo depredador-presa describe las interacciones dinámicas entre dos poblaciones: una población de presas (por ejemplo, conejos) y una población de depredadores (por ejemplo, zorros). Este modelo captura cómo las tasas de natalidad y mortalidad de ambas especies dependen de sus interacciones mutuas y de otros factores externos.

   Supongamos que el sistema está modelado por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

   $$x' = (a - by)x, \qquad y' = (cx - d)y - h,$$

   donde:

   - $x(t)$ representa el tamaño de la población de presas.
   - $y(t)$ representa el tamaño de la población de depredadores.
   - a es la tasa de crecimiento natural de las presas en ausencia de depredadores.
   - b mide el efecto de depredación sobre las presas.
   - c mide la efectividad de la depredación en apoyar el crecimiento de los depredadores.
   - d es la tasa de mortalidad natural de los depredadores en ausencia de presas.
   - h es un término adicional que modela la caza o eliminación constante de depredadores por factores externos.

   Responda:

a) Encuentre los puntos críticos del sistema y calcule las matrices Jacobianas asociadas.

b) Asigne valores $a = 0{,}4$, $b = 0{,}01$, $c = 0{,}003$, $d = 0{,}3$ y $h = 10$. Analice los puntos críticos obtenidos e interprete lo que estos resultados podrían significar en la dinámica depredador presa.

a) Para eso igualamos a cero y tenemos

$$0 = (a-by)x \qquad 0 = (cx-d)y-h$$

Se tiene que $x=0$ ó $a-by=0$

- $x=0$ $\quad -dy-h=0 \Longrightarrow y=-\frac{h}{d}$ $\quad \therefore \left(0,-\frac{h}{d}\right)$ es punto crítico

- $a-by=0 \Longrightarrow y=\frac{a}{b}$ luego reemplazando en la segunda ecuación tenemos

$$0=(cx-d)\cdot\frac{a}{b}-h=\frac{acx}{b}-\frac{ad}{b}-h$$

$$\Longleftrightarrow \frac{acx}{b}=h+\frac{ad}{b}=\frac{hb+ad}{b} \Longrightarrow x=\frac{hb+ad}{c}$$

$\therefore \left(\frac{hb+ad}{c},\frac{a}{b}\right)$ es punto crítico.

Luego calculando su Jacobiana

$$J_{(x,y)}=\begin{pmatrix} a-by & -bx \\ cy & cx-d \end{pmatrix}$$

y evaluando en sus puntos críticos

$$J_{\left(0,-\frac{h}{d}\right)}=\begin{pmatrix} a+\frac{bh}{d} & 0 \\ -\frac{hc}{d} & -d \end{pmatrix} \quad y \quad J_{\left(\frac{hb+ad}{c},\frac{a}{b}\right)}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{b\,[hb+ad]}{c} \\ \frac{ca}{b} & hb+ad-d \end{pmatrix}$$

b) Notemos que el punto crítico $\left(0,-\frac{10}{0{,}3}\right)$ no es de nuestro interes en el análisis ya que no se podría tener una cantidad negativa de población

Por lo que solo estudiaremos el otro punto critico, por lo que reemplazando los valores obtenemos

$$J_{\left(\frac{530}{3},40\right)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{11}{6} \\ \frac{3}{25} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

que tiene autovalores $\frac{5 \pm i\sqrt{327}}{40}$, entonces el punto es un foco. Es decir la solución eventualmente toca uno de los ejes $x=0$ ó $y=0$, entonces algunas poblaciones se extinguirá.