Ayudantía 24

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
18 de noviembre de 2024

UNIVERSIDAD DE CHILE

---

1. Considere $(r(x)y')' + p(x)y = 0$ donde $r(x) > 0$ y $r(x), p(x)$ son funciones continuas. Suponga que
$$\int_\alpha^\infty \frac{1}{r(x)}dx = \infty = \int_\alpha^\infty p(x)dx \quad \alpha > 0$$
entonces cualquier solución de la ecuación diferencial tiene infinitos ceros en $(0, \infty)$.

2. Considere la ecuación $y'' + p(x)y = 0$, suponga que $0 \leq m \leq p(x) \leq M$ para todo $x \in (a, b)$. Si una solución de esta ecuación tiene dos ceros consecutivos $x_1 < x_2$ en (a, b), entonces
$$M^{-1/2}\pi \leq x_2 - x_1 \leq m^{-1/2}\pi$$
.

3. Usando las misma hipótesis del problema anterior, sea n el número de ceros de una solución de la ecuación diferencial en $(x_1, x) \subset (a, b)$ muestre que se cumple la siguiente desigualdad
$$\frac{x - x_1}{\pi}\sqrt{m} < n < \frac{x - x_1}{\pi}\sqrt{M}$$
.

4. Considere la ecuación diferencial
$$y'' + q(x)y = 0 \quad , 0 \leq x \leq 1$$
donde q es una función continua en $[0, 1]$. Si $\min_{x\in[0,1]} q(x) > k^2\pi^2$ para algún entero positivo k. Demuestre que toda solución de la ecuación diferencial tiene por lo menos k ceros en el intervalo $[0, 1]$.