UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 20

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
30 de octubre de 2024

---

1. Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2py = 0$$

a) Demuestre que la solución general es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \ldots$$

$$y_2(x) = x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \ldots$$

Encuentre el enésimo sumando de ambas series y pruebe que convergen para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Muestre que si $p = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2n$ que contiene solo potencias pares de x y que $y_2(x)$ es una serie infinita, luego muestre que lo mismo ocurre si $p = 2n + 1$.

c) Para cada número natural n se define el **enésimo polinomio de Hermite** $H_n(x)$ como el polinomio que es solución de

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

y cuyo término dominante es $2^n x^n$. Calcule los primeros 3 polinomios de Hermite.

d) Pruebe que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$