Ayudantía 14

Universidad de Chile

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
9 de octubre de 2024

1. Sean f y g funciones reales, demuestre que

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

2. Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

3. Muestre que si $p(s) = as^2 + bs + c$ tiene un cero repetido $r_1 \in \mathbb{R}$ entonces la solución de

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

es

$$y(t) = k_0(1 - r_1 t)e^{r_1 t} + k_1 t e^{r_1 t} + \frac{1}{a}\int_0^t \tau e^{r_1 \tau} f(t-\tau)d\tau$$

4. Sea $w = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{as^2 + bs + c}\right)$, donde a, b y c son contantes y $a \neq 0$.

   a) Muestre que w es solución de

$$aw'' + bw' + cw = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = \frac{1}{a}$$

   b) Sea f una función continua en $[0, \infty)$ y defina

$$h(t) = \int_0^t w(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

   use la regla de Leibniz para derivar una integral para mostrar que h es solución de

$$ah'' + bh' + ch = f, \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 0$$