1. Considere la matriz

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{t} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué intervalos de $\mathbb{R}$ puede ser $\phi(t)$ matriz fundamental de una ecuación lineal homogénea?

b) Construya dicha ecuación diferencial.

a) Calculamos su determinante

$$\det(\phi(t)) = \begin{vmatrix} \sin\frac{\pi}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{t} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sin\frac{\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t}$$

Es distinto de 0 cuando

$$\frac{\pi}{t} \neq \{k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

es decir

$$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2}{2k+1}, \frac{1}{k}\right)$$

b) Para que forme un sistema lineal homogeneo se debe de cumplir que

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t)$$

es decir

$$A(t) = \phi'(t)\phi(t)^{-1}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\cos\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{t^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{t}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{t^2}\tan\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\phi(t)$ satisface

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

a) Comprobar que las funciones

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

forman un sistema fundamental de soluciones.

b) Encontrar la matriz fundamental canónica en 0.

a) $x_1' = e^t = 2e^t + (-e^t)$ $x_1' = 5e^{5t} = 2e^{5t} + 3e^{5t}$

$x_2' = -e^t = 3e^t + 4(-e^t)$ $x_2' = 15e^{5t} = 3e^{5t} + 4(3e^{5t})$

Por lo tanto $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}$ es una matriz solución del sistema y es fundamental ya que

$$\det(\phi(t)) = 3e^{6t} + e^{6t} = 4e^{6t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

b) Debemos buscar la matriz fundamental canonica en 0

$$\Psi(t) = \phi(t)\,\phi(0)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{5t} & -e^t + e^{5t} \\ -3e^t + 3e^{5t} & e^t + 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

3. Sea $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ continua tal que existe $M > 0$ con

$$||A(t)|| \leq M \quad \forall \ t \in \mathbb{R}$$

con $x(t)$ solución de $x' = A(t)x$.

a) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, encuentre el sistema de ecuación diferencial que satisface $y_\lambda(t) = e^{-\lambda t}x(t)$.

b) Demuestre que la función $\varphi(t) = ||y_\lambda(t)||^2$ es derivable y que

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) \leq (M - \lambda)\varphi(t) \quad \forall \ t \in \mathbb{R}$$

c) Hallar los valores de λ para los cuales $y_\lambda(t)$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$.

a) Derivando obtenemos

$$y_\lambda'(t) = e^{-\lambda t} \cdot x'(t) - \lambda e^{-\lambda t} \cdot x(t) = e^{-\lambda t} A(t)\, x(t) - \lambda y_\lambda(t)$$
$$= A(t)\, y_\lambda(t) - \lambda y_\lambda(t)$$
$$= (A(t) - \lambda I)\, y_\lambda(t)$$

b) $y_\lambda(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$, luego

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} (y_j(t))^2$$

que es claramente derivable con

$$\varphi'(t) = 2\sum_{j=1}^{n} y_j(t) \cdot y_j'(t) = 2\langle y_\lambda(t), y_\lambda'(t)\rangle$$
$$= 2\langle y_\lambda(t), (A(t) - \lambda I)\, y_\lambda(t)\rangle$$

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) = y_\lambda(t)^t\, [A(t) - \lambda I_n]\, y_\lambda(t)$$

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) = y_\lambda(t)^t A(t) y_\lambda(t) - \lambda \langle y_\lambda(t), y_\lambda(t)\rangle$$

$$\leq | y_\lambda(t)^t A(t) y_\lambda(t)| - \lambda \varphi(t)$$
$$\leq \| y_\lambda(t)\| \| A(t) y_\lambda(t)\| - \lambda \varphi(t)$$
$$\leq \|A(t)\| \varphi(t) - \lambda\varphi(t) \leq (M-\lambda)\varphi(t)$$

c) Usando el inciso anterior

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leq 2(M-\lambda)$$

de lo que se concluye

$$\varphi(t) \leq C e^{2(M-\lambda)t} \qquad C>0$$

De modo que si $\lambda \in (M,\infty)$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} \|y_\lambda(t)\|^2 = 0$$

Lo que implica que $y_\lambda(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

4. Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-4-\lambda) - 2$$
$$= 10 + 7\lambda + \lambda^2$$
$$= (\lambda+5)(\lambda+2)$$

$\lambda=-2$ | $Ker(A+2I) = \langle (1,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x = y$$

$\lambda=-5$ | $Ker(A+5I) = \langle (1,-2) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$y = -2x$$

Luego
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-2t}+e^{-5t} & e^{-2t}-e^{-5t} \\ 2e^{-2t}-2e^{5t} & e^{-2t}+2e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{2t}+e^{-5t} & e^{-2t}-e^{-5t} \\ 2e^{-2t}-2e^{5t} & e^{-2t}+2e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$