Ayudantía 4

UNIVERSIDAD DE CHILE

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
28 de agosto de 2024

1. Considere el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} (1+x^2)y' = \sqrt{1+y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   a) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI no tiene solución.

   b) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI tiene solución única. Determinar la solución.

   c) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI tiene mas de una solución. Determinar las soluciones.

2. Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

   a) Calcular las 3 primeras iteraciones de Picard.

   b) Probar que el PVI tiene una solución en (al menos) $(-1/2, 1/2)$.

   c) Hallar la solución de la ecuación diferencial, entonces demostrar que la solución del PVI está definida en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

3. Considere que el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   Probar que si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en un intervalo que contiene a x_0, entonces existe una solución única del PVI en ese intervalo.

   El ejercicio anterior es importante, ya que nos dice que si una ecuación diferencial es lineal, entonces donde esta definida la solución es el intervalo mas grande donde $p(x)$ y $q(x)$ son continuas. Otra consecuencia interesante es que el intervalo de validez de la solución depende de solo x_0.

4. Determinar el intervalo de validez para las soluciones del los siguientes PVI sin resolverlas.

   a) $(x^2 - 9)y' + 2y = \ln(5 - x), \quad y(4) = -3$

   b) $y' = \frac{2x-y}{x-1}$, y(-3)=4