1.- Probar que la ecuación

$$\operatorname{sen}(yz)+\operatorname{sen}(xz)+\operatorname{sen}(xy)=0$$

admite una única solución $z=f(x,y)$ de clase C^1 en una vecindad del punto $(\pi,0)$, que cumple $f(\pi,0)=1$

Solución: Definimos la función

$F:\mathbb{R}^{2+1}\to\mathbb{R}^1$ con

$$F(x,y,z)=\operatorname{sen}(yz)+\operatorname{sen}(xz)+\operatorname{sen}(xy)$$

Veamos que $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$. Para eso necesitamos que F sea diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$, y que $H:\mathbb{R}^3\to M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ con $H(x,y,z)=Df(x,y,z)$ es continua. Y para ver que esta función H es continua basta con ver que las derivadas parciales son continuas y eso además implicará que F es diferenciable. Calculemos entonces los derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \cos(xz)\cdot z + \cos(xy)\cdot y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \cos(yz)\cdot z + \cos(xy)\cdot x$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \cos(xz)\cdot x + \cos(yz)\cdot y$$

Entonces son continuas pues los polinomios y la función cos son continuas y por lo tanto como sumar, multiplicar y componer funciones continuas da algo continuo todas las derivadas parciales son continuas.

Luego la función H es continua y F es diferenciable.

Por lo tanto F es de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$. Considere el punto $(\pi, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ se cumple que

$$F(\pi, 0, 1) = \text{sen}(0) + \text{sen}(\pi) + \text{sen}(0)$$
$$= 0$$

Y también $$\frac{\partial F}{\partial z}(\pi,0,1) = \cos(\pi)\cdot\pi + \cos(0)\cdot 0$$
$$= -\pi \neq 0$$

luego se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita, lo que implica que existe una vecindad W de $(\pi, 0)$ y una función $f: W \to \mathbb{R}$ tal que $f(\pi,0)=1$, $f \in C^1(W)$ y que $F(x,y,f(x,y))=0$ con $(x,y) \in W$, es decir, que

$$\operatorname{sen}(x\, f(x,y)) + \operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}(y f(x,y)) = 0$$

$\forall\ (x,y) \in W$. Y esto es lo que buscábamos

2.- Sean $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ y $g:(c,d) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y supongamos que $g(y) \neq 0$ para cada $y \in (c,d)$. Probar que la ecuación

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{y_0}^{y} g(t)\,dt.$$

define una función $y=\phi(x)$ en una vecindad del punto x_0 que es solución de la ecuación

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$ verificando $\phi(x_0) = y_0$

3.- ¿Es posible despejar $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ en el sistema de ecuación

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3$$
$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$$

cerca de $(x,y,z)=(1,1,1)$, $(u,v)=(1,1)$?

Calcular $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ en $(x,y,z)=(1,1,1)$

Definimos la función $F: \mathbb{R}^{3+2} \to \mathbb{R}^2$ con

$$F(x,y,z,u,v) = (xy^2 + xzu + yv^2 - 3,\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2)$$

F es de clase $C^1(\mathbb{R}^5)$ note que

$$F(1,1,1,1,1) = (0,0) \text{ y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(x,y,z,u,v) = xz, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u}(x,y,z,u,v) = 3u^2yz - 2uv^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}(x,y,z,u,v) = 2yv, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v}(x,y,z,u,v) = 2x - 2u^2v$$

$$\Rightarrow \det f_{(u,v)}(1,1,1,1,1) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = -2 \neq 0$$

Luego existe $W \subseteq \mathbb{R}^3$ y $f: W \to \mathbb{R}^2 \in C^1(W)$ tal que $f(1,1,1) = (1,1)$

$$f((x,y,z), f(x,y,z)) = 0 \quad \forall\ (x,y,z) \in W$$

y $D_f(1,1,1) = -\left(f_{(u,v)}(1,1,1)\right)^{-1} f_{(x,y,z)}(1,1,1,1,1)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z,u,v) = y^2 + zu \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z,u,v) = 2xy + v^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z,u,v) = xu, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z,u,v) = 2v$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z,u,v) = u^3 z \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z,u,v) = u^3 y$$

$$D_f(1,1,1) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= +\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y por otro lado como $f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z))$

$$\Rightarrow D_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial u}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial v}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}(1,1,1) = -1}$$

4.- Defina $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $g(s,t) = (e^s \cos(t), e^s \operatorname{sen}(t))$

a) Pruebe que g satisface las condiciones del teo de la función inversa.

g es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ ✓

$$Df(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s \cos(t) & -e^s \operatorname{sen}(t) \\ e^s \operatorname{sen}(t) & e^s \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\det Df(s,t) = e^{2s}\cos^2(t) + e^{2s}\operatorname{sen}^2(t)$$
$$= e^{2s}$$

Y como $e^s \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow \det Df(s,t) \neq 0 \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$

luego $Df(s,t)$ es invertible y por lo tanto $\forall (s,t)$

se satisfacen las hipótesis del teo función inversa.

b) Sea $\tilde{\Delta} = \{(s,t) : 0 < t < 2\pi,\ s \in \mathbb{R}\}$. Demuestre que $g|_{\tilde{\Delta}}$ es inyectiva. Encuentre $g(\tilde{\Delta})$ y g^{-1}.

Si (s,t), $(p,q) \in \tilde{\Delta}$ y

$$g(s,t) = g(p,q) \Rightarrow$$

$$(e^s\cos t, e^s\operatorname{sen} t) = (e^p\cos q, e^p\operatorname{sen} q)$$

$$\Rightarrow e^s\cos t = e^p\cos q,\quad e^s\operatorname{sen} t = e^p\operatorname{sen} q$$

$$\Rightarrow e^{2s}\cos^2 t = e^{2p}\cos^2 q,\quad e^{2s}\operatorname{sen}^2 t = e^{2p}\operatorname{sen}^2 q$$

$$\Rightarrow e^{2s}(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = e^{2p}(\cos^2 q + \operatorname{sen}^2 q)$$

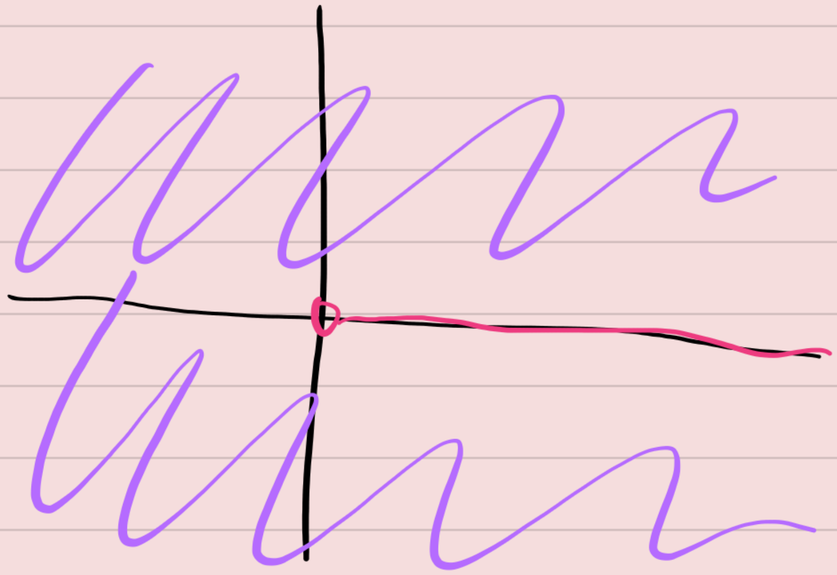
$$\Rightarrow e^{2s} = e^{2p} \Rightarrow \quad s = p$$

$\Rightarrow \cos t = \cos q, \quad \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} q$

Como $0 < t < 2\pi$, $0 < q < 2\pi$

$\Rightarrow t = q \Rightarrow (s,t) = (p,q)$

$\Rightarrow g|_{\tilde{\Delta}}$ es inyectiva.



$$g^{-1} : g(\tilde{\Delta}) \longrightarrow \tilde{\Delta}$$

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right)$$

si $x \neq 0$

$$\longmapsto \left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

si $x = 0$, $y > 0$

$$\longmapsto \left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$$

si $x=0$, $y<0$

Pregunta: ¿Es g^{-1} continua?