

# Ayudantía 2

Matías Saavedra Lagos

August 31, 2024

Ocuparemos la siguiente definición en los ejercicios:

**Definición:** Consideremos el subconjunto  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diremos que  $x \in \mathbb{R}^n$  es adherente a  $P$  si existe una sucesión  $\{x_k\}$  que verifique las siguientes propiedades:

1.  $x_k \in P$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$

El conjunto de puntos adherentes de  $P$  se denomina adherencia o clausura de  $P$  y se denota por  $\overline{P}$ .

1. Demuestre que  $\overline{P}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $P$ .
2. Considere el conjunto  $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 3, 0 < y < 1\} \cup \{(0, 0)\}$ 
  - (a) Determine si  $S$  es abierto y/o cerrado.
  - (b) Calcule  $\overline{S}$
3. Considere en  $\mathbb{R}^2$  los conjuntos  $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Demuestre que cada uno de los  $A_n$  es cerrado
  - (b) Considere  $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$  y encuentre  $\overline{A}$ .
  - (c) El conjunto  $A$  ¿es cerrado?
4. Determine si son compactos en  $\mathbb{R}^2$ 
  - (a)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 1\}$
  - (b)  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \in \mathbb{Q}\}$
  - (c)  $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^7 + |y|^7 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$