Ayudantía 1

1.- (Desigualdad de Young)

a) Si $p \in (0,1)$, entonces $1+px \geq (1+x)^p$, para todo $x \geq -1$

Solución: Primero note que $1+p(-1) \geq 0$, pues $0<p<1$ y entonces $1+p(-1) \geq (1-1)^p$, luego la afirmación se cumple para $x=-1$.
Ahora definimos la función $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1+px-(1+x)^p$.
Queremos demostrar que $f(x) \geq 0$ para todo $x>-1$. Como $(-1,\infty)$ es un intervalo abierto, podemos derivar f en cualquier punto ahí y entonces $f'(x) = p - p(1+x)^{p-1}$ para todo $x>-1$. Para encontrar algún máximo o mínimo local veamos en donde se anula la derivada. $f'(x)=0 \Leftrightarrow p-p(1+x)^{p-1}=0 \Leftrightarrow p = p(1+x)^{p-1} \Leftrightarrow 1 = (1+x)^{p-1}$
$\Leftrightarrow 1^{\frac{1}{p-1}} = (1+x) \Leftrightarrow 1 = 1+x \Leftrightarrow x=0$.
Luego la derivada solo se anula en 0. Veamos con el criterio de la segunda derivada si es que la función alcanza un máximo o mínimo en este punto.

$$f''(x) = -p(p-1)(1+x)^{p-2}$$

Entonces evaluando en 0 vemos que $f''(0) = -p(p-1)$. Y como $0<p<1$ entonces $-p<0$ y $p-1<0$, luego $-p(p-1)>0$ y por lo tanto $f''(0)>0$, lo que implica por el criterio de la segunda derivada que f alcanza un mínimo en el punto 0.
Como este es el único punto en donde la derivada se anula este es un mínimo global luego se cumple que

$$f(x) \geq f(0) = 1+p\cdot 0 - (1+0)^p = 1-1 = 0 \quad \text{para todo } x>-1$$

Y entonces $1+px-(1+x)^p \geq 0 \Rightarrow 1+px \geq (1+x)^p \quad \forall\, x>-1$. Y como ya vimos el caso cuando $x=-1$, estamos listos $\square$

b) Para todo $\alpha \in [0,1]$ y todo $x, y \geq 0$ se cumple que

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha) y$$

Solución: Si $\alpha = 0$ entonces $x^\alpha y^{1-\alpha} = x^0 y^1 = y \leq 0x + (1-0)y$ luego se cumple si $\alpha = 0$, si $\alpha = 1$ es lo mismo. Si $y = 0$ también se cumple pues como $\alpha \in [0,1]$, $y, x \geq 0 \Rightarrow \alpha x \geq 0$ $\left((1-\alpha)y \geq 0\right)$ y entonces $0 = x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha) y$.

Falta verificar el caso cuando $\alpha \in (0,1)$ y $y \neq 0$. En este caso tenemos que

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha) y \;/\cdot\tfrac{1}{y} \iff x^\alpha y^{-\alpha} \leq \alpha \frac{x}{y} + 1 - \alpha.$$

$$\iff \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \leq \alpha \frac{x}{y} + 1 - \alpha$$

Esta desigualdad se parece a la del lema anterior pero no es exactamente lo mismo, pero note que $\alpha \in (0,1)$ y $\frac{x}{y} \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} - 1 \geq -1$ y entonces por la parte a) sabemos que $1 + \alpha\left(\frac{x}{y} - 1\right) \geq \left(1 + \frac{x}{y} - 1\right)^\alpha \quad \forall\, x \geq 0, y > 0, \alpha \in (0,1)$

$$\Rightarrow 1 + \alpha \frac{x}{y} - \alpha \geq \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \leq \alpha \frac{x}{y} + 1 - \alpha$$

Y esto es justamente lo que queríamos $\square$

c) Desigualdad de Young: Sean $p>1$ y $q>1$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces, dados dos números no-negativos u y v, se cumple que

$$uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

Solución: Como $p>1$ entonces $\alpha=\frac{1}{p}\in(0,1)$ y $1-\alpha=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$

Luego por el ejercicio anterior tomando $x=u^p$, $y=v^q$ obtenemos

$$(u^p)^{1/p}(v^q)^{1/q} \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q} \Rightarrow uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q} \quad \square$$

2.- Desigualdad de Holder: Sea $n\in\mathbb{N}$. Sean $p>1$ y $q>1$ tales que $1/p+1/q=1$ Entonces para todo $x,y\in\mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}=\|x\|_p\|y\|_q.$$

Solución si $x=0$ o $y=0$ entonces $x_i=0$ o $y_i=0$ $\forall 1\leq i\leq n$ entonces $|x_iy_i|=0$ y por lo tanto $0=\sum_{i=1}|x_iy_i|=0=\|x\|_p\|y\|_q$.

Luego se cumple lo buscado. Si $x\neq 0$, $y\neq 0$ entonces $\|x\|_p\neq 0$, $\|y\|_q\neq 0$. (Lo demostraremos más adelante) y entonces podemos definir $u_i=\frac{|x_i|}{\|x_i\|_p}$ y $v_i=\frac{|y_i|}{\|y_i\|_q}$. Usando la desigualdad de Young a esto nos queda que $\frac{|x_i|}{\|x_i\|_p}\frac{|y_i|}{\|y_i\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x_i\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y_i\|_q^q}$

PROARTE

Entonces sumando cada término tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|x\|_p}\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

$$= \frac{1}{p}\frac{1}{\|x\|_p^p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\|y\|_q^q}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q$$

$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|\,|y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leq 1 \quad /\cdot \|x\|_p\|y\|_q \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \|x\|_p\|y\|_q$$

$\square$

3.- Sea $n \in \mathbb{N}$ y $p>1$. Entonces $\|\cdot\|_p$ define una norma sobre $\mathbb{R}^n$.

Sol: Veamos primero la desigualdad triangular. Note que

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}(|x_i|+|y_i|)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|y_i|$$

Y entonces por desigualdad de Hölder se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{p-1}|y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Como $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \Rightarrow \dfrac{1}{q}=1-\dfrac{1}{p}=\dfrac{p-1}{p}$

y también $p=q(p-1)$ luego.

$$\|x_i+y_i\|_p^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} (\|x\|_p+\|y\|_p)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} (\|x\|_p+\|y\|_p)$$

$$=\|x+y\|_p^{p-1} (\|x\|_p+\|y\|_p) \quad \Big/ \frac{1}{\|x+y\|_p^{p-1}}$$

$$\|\cancel{x}+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$$

y con esto tenemos la desigualdad triangular ◻

Veamos que se cumplen las otras propiedades:
Si $\vec{x}=\vec{0}$ entonces $\vec{x}=(0,0,\dots,0)$, luego $\|\vec{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|0|^p\right)^{1/p}=0$
Por otro lado si $\vec{x}\neq 0$ entonces existe x_i tal que $x_i\neq 0$ y entonces $|x_i|>0$ luego $|x_i|^p>0$. Como en general $|x_j|^p\geq 0$ para todo $1\leq j\leq n$ concluimos que $\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p>0$, luego $\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p}>0$, es decir

$\|\vec{x}\|_p\neq 0$. Por el contra recíproco concluimos que $\|\vec{x}\|_p=0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

Finalmente si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces $\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

y $\|\alpha\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^p |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

$= |\alpha|^{p \cdot \frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

$= |\alpha| \, \|\vec{x}\|_p$

Y con todo esto concluimos que $\|\cdot\|_p$ es una norma para todo ~~p∈(1,∞)~~ $p \in (1, \infty)$ $\square$

4.- Determine $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_\infty = 1\}$ y grafíquelo.

Si $\|(x,y)\|_\infty = 1$ entonces $\max\{|x|, |y|\} = 1$, luego $|x|, |y| \leq 1$ y entonces $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

Si $\max\{|x|, |y|\} = |x|$ entonces $|x| = 1$ y entonces $x = \pm 1$ mientras que y cumple que $-1 \leq y \leq 1$.

Si $\max\{|x|, |y|\} = |y|$ entonces $|y| = 1$ y entonces $y = \pm 1$ mientras que x cumple que $-1 \leq x \leq 1$.

Concluimos que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_\infty = 1\} = \{1\} \times [-1,1] \cup \{-1\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{1\} \cup [-1,1] \times \{-1\}.$$

Y el gráfico es