Resumen integrales indefinidas

Sergio Muñoz

2023

Índice

1. Antiderivadas e integrales elementales

Definición

Se dice que g es una antiderivada (o primitiva) de f si $g' = f$. $\square$

Ejemplo Como $(x^2)' = 2x$, entonces x^2 es una primitiva de $2x$. Pero como $(x^2 + 510)' = 2x + 0 = 2x$, entonces también $x^2 + 510$ es primitiva de $2x$. $\square$

Propiedad Si g y h son primitivas de f, entonces $g - h$ es constante. $\square$

Observación Por la proposición anterior, si conocemos una primitiva g para f, toda otra primitiva se escribe a partir de g como $g + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante. De hecho, valores diferentes de $C \in \mathbb{R}$ determinan primitivas diferentes de f. $\square$

Definición

Definimos la integral indefinida de f como el conjunto de todas sus primitivas, y se denota $\int f(x)dx$ (por ahora, dx indica la variable)

Si g es una primitiva de f, entonces se cumple $\int f(x)\,dx = \{g(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}$, lo que se abrevia

$$\int f(x)\,dx = g(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

$\square$

Propiedad Note que siempre se cumple $\int g'(x)\,dx = g(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$ $\square$

Ejemplo

1. $\int 2x\,dx = x^2+C,\ C\in\mathbb{R}$, porque $(x^2)' = 2x$
2. $\int 6x\,dx = 3x^2+C,\ C\in\mathbb{R}$, porque $(3x^2)' = 6x$
3. $\int (x^2+x+1)\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C,\ C\in\mathbb{R}$, porque $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)' = x^2+x+1$
4. $\int \left(3x^{5/2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{6}{7}x^{7/2}+2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$, porque $\left(\frac{6}{7}x^{7/2}+2\sqrt{x}\right)' = 3x^{5/2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\square$

Si damos alguna condición que cumpla una primitiva, mientras se atenga al dominio de ella y de su derivada, siempre existirá una única primitiva que lo cumplirá:

Ejemplo Encuentre la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple $g'(x) = 3x^2+5$ y $g(2) = 9$.

$\square$

Solución de ejemplo: Claramente g debe ser una primitiva de $3x^2+5$, así que debe ser de la forma $g(x) = x^3+5x+C$, porque $\int (3x^2+5)\,dx = x^3+5x+C,\ C\in\mathbb{R}$. Pero la condición dada implica que

$$9 = g(2) = 2^3+5\cdot 2+C = 18+C \quad\Longleftrightarrow\quad C = 9-18 = -9$$

de modo que la única primitiva que cumple la condición dada es $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $g(x) = x^3+5x-9$ $\square$

1.1. Guía Integrales elementales

1. Calcule:

a) $\int (2x)\,dx$

b) $\int (3x^2 + 2x + 7)\,dx$

c) $\int (x^2 + x + 1)\,dx$

d) $\int 4x^3\,dx$

e) $\int 6x^2\,dx$

f) $\int (2x^5 - 5x^3 + x^2 - 3)\,dx$ Resp

g) $\int (x-1)(x-2)\,dx$

h) $\int (x-3)^2\,dx$

i) $\int x^{-3/5}\,dx$ Resp

j) $\int \left(5x^{-2} + \frac{4}{x^3}\right)\,dx$ Resp

k) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

l) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

m) $\int \left(x^{4/3} - 5x^{-2/3} + 7\sqrt{x}\right)\,dx$

2. Determine, en cada caso, la función f que cumple lo pedido en $\mathbb{R}$:

   a) $f'(x) = 4x^2 + 1$ y $f(0) = 3$
   b) $f'(x) = 2x^2 + 5x - 2$ y $f(0) = 5$
   c) $f'(x) = 5x^3 - 9x^2 + 3x - 1$ y $f(3) = 2$
   d) $f'(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ y $f(9) = 9$

3. Verifique que $\int e^x dx = e^x + C, C \in \mathbb{R}$

4. Verifique que $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C, C \in \mathbb{R}$

5. Verifique, para $a < 0$ y $a \neq 1$ y usando que $a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$, que se cumple

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, C \in \mathbb{R}$$

2. Sustitución simple

Cuando hay que integrar una función que aparenta ser la derivada por Regla de la Cadena de sus primitivas, es decir, cuando es producto y entre sus factores hay una composición, podemos usar el Método de Sustitución Simple, que se basa en lo siguiente: Teorema Si en algún intervalo $\int f(x)\,dx = F(x)+k$, $k \in \mathbb{R}$ y g es derivable, entonces $\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big)+k$, $k \in \mathbb{R}$ □

Demostración. Basta notar que, por Regla de la cadena, $\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$ □

Observación La forma operativa de sustitución simple (o cambio de variable, como también se le conoce) es definir una variable auxiliar $u = g(x)$, de modo que, usando la **notación diferencial** $du = g'(x)\,dx$ (se basa en que $\frac{du}{dx} = g'(x)$) y por tanto la sustitución se escribe también como:

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

con la idea de que la segunda integral sea más simple (más allá del nombre de la variable).

Cuidado, la variable auxiliar no es una respuesta razonable, hay que volver después a la variable original □

Ejemplo Calcule $\int \operatorname{sen}(3x)\,dx$ □

Solución de ejemplo:

$$\int \operatorname{sen}(3x)\,dx = \int \operatorname{sen}(u)\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(u)\,du$$

$$\begin{pmatrix} u = 3x & \\ \therefore du = 3dx & \therefore dx = \dfrac{du}{3} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\cos(u)}{3} + k = -\frac{\cos(3x)}{3} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

□

Observación

1. Note que podemos omitir $k \in \mathbb{R}$ cuando entorpezca.
2. Al realizar la sustitución o cambio de variable, no debe mezclar variables, es importante.

$\square$

Ejemplo Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^4}dx$ $\square$

Solución de ejemplo:

$$\int \frac{x}{(x-1)^4}dx = \underset{\begin{pmatrix} u = x-1 & \therefore x = u+1 \\ \therefore du = dx & \end{pmatrix}}{\int \frac{u+1}{u^4}du} = \int u^{-3}\,du + \int u^{-4}\,du$$

$$= \frac{u^{-2}}{-2} + \frac{u^{-3}}{-3} + k = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + k \; k \in \mathbb{R}$$

$\square$

Ejemplo Calcule $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$ $\square$

Solución de ejemplo:

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}dx = \underset{\begin{pmatrix} u = \cos(x) \\ \therefore du = -\operatorname{sen}(x)\,dx \end{pmatrix}}{-\int \frac{1}{u}du}$$

$$= -\ln\big(|u|\big) + k = -\ln\big(|\cos(x)|\big) + k,\; k \in \mathbb{R}$$

$\square$

Ejemplo Calcule $\displaystyle\int 2^x\,dx$ $\square$

Solución de ejemplo: Recuerde (!) que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene, por definición, $2^x = e^{x\ln(2)}$, por lo cual

$$\int 2^x\,dx = \int e^{x\ln(2)}dx \underset{\begin{pmatrix} u = x\ln(2) & \\ \therefore du = \ln(2)dx & \therefore dx = \frac{du}{\ln(2)} \end{pmatrix}}{=} \int e^u \frac{du}{\ln(2)} = \frac{e^u}{\ln(2)} + k$$

$$= \frac{2^x}{\ln(2)} + k,\; k \in \mathbb{R}$$

$\square$

Ejemplo Calcule la siguiente integral indefinida $\int 6x^3 5^{x^4+7}\,dx$ □

Solución de ejemplo:

$$\int 6x^3 5^{x^4+7}\,dx = \frac{3}{2}\int 5^u\,du = 3\frac{5^u}{2\ln(5)} + k$$

$$\begin{pmatrix} u = x^4+7 & \\ \therefore du = 4x^3\,dx & \therefore \frac{3}{2}du = 6x^3\,dx \end{pmatrix}$$

$$= 3\frac{5^{x^4+7}}{2\ln(5)} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

□

2.1. Guía Integrales por sustitución

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\int (1-2x^2+3x^3)dx$

   b) $\int \left(\frac{3}{x^3} + 2x^{3/2} - 1\right)dx$

   c) $\int \left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^5(t)} - \frac{1}{t^2}\right)dt$ Resp

   d) $\int \left(2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

   e) $\int (9t+12)^5 dt$

   f) $\int \frac{(3x+4)^2}{\sqrt{x}}dx$

   g) $\int \left(5\cos(10x) - e^{5x}\right)dx$ Resp

   h) $\int x^2\operatorname{sen}(5x^3+43)dx$

   i) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ Resp

   j) $\int \frac{x}{\sqrt{1+5x^2}}dx$

   k) $\int \sec^2(x)\tan(x)dx$

   l) $\int (x^3 + 4\sqrt{x} - \frac{4}{x^2})dx$

2. Encuentre las primitiva o antiderivadas de:

   a) $\int (x^2+1)^{10}(2x)\,dx$

   b) $\int \frac{2-x^2}{(6x-x^3)^{\frac{1}{3}}}\,dx$ Resp

   c) $\int 25\cos^2(x)\,dx$

   usando $cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

   d) $\int (\operatorname{sen}(x))^{99}\cos(x)\,dx$

   e) $\int \frac{1}{x^{\frac{-2}{3}}}(6x-x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx$

   f) $\int \operatorname{sen}^3(2x)\cos(2x)\,dx$

3. Integración por partes

<u>Teorema</u> Si existen todas las primitivas involucradas, se cumple:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$\square$

Demostración. Se basa en la derivada de un producto de funciones: como $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$, se tiene $f(x)\cdot g'(x) = \big(f(x)\cdot g(x)\big)' - g(x)\cdot f'(x)$, de lo que resulta la igualdad planteada. $\square$

<u>Observación</u> La “fórmula” de integración por partes se escribe, de manera operativa, como

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

donde $u = f(x)$ y $v = g(x)$, y se usan las diferenciales $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$ lo que se llama “notación diferencial” y tiene una correlación *visual* con $\dfrac{du}{dx} = f'(x)$ y con $\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ respectivamente.

Ésta es la forma operativa ya que, al enfrentar una integral que sea un producto de funciones, no sabemos a priori que un factor es f y ni que el otro factor es g', y menos conocemos de antemano a g. Los ejemplos mostrarán cómo usar (elegir) u y dv.

Pasar de dv a v es **sin constante de integración**. $\square$

<u>Ejemplo</u> Calcule $\int x\,\mathrm{sen}(x)dx$ $\square$

Solución de ejemplo: El *integrando* ya tiene dos factores, x y $\mathrm{sen}(x)$. Podemos escoger $u = x$ con $dv = \mathrm{sen}(x)\,dx$ (la idea es encontrar $v\ldots$) o bien al revés, pero usaremos la primera opción ya que, aunque ambos factores son fáciles de derivar e integrar, como $x' = 1$ se nos simplifica la integral que queda. Observe:

$$\int x\,\mathrm{sen}(x)dx = \underset{\left(\begin{array}{cc} u = x & \therefore du = dx \\ dv = \mathrm{sen}(x)\,dx & \therefore v = -\cos(x)\end{array}\right)}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + k,\ k\in\mathbb{R}$$

$\square$

<u>Observación</u> En el ejemplo anterior había dos factores visibles, pero 1 siempre es un factor a considerar si hiciera falta, como muestra el siguiente ejemplo. $\square$

Ejemplo Calcule $\int \ln(x)\,dx$ $\square$

Solución de ejemplo: Aparentemente hay sólo un factor, $\ln(x)$, pero en verdad 1 es también un factor, pero evidentemente integraremos 1 (en realidad, usaremos $du = dx$) y derivaremos $\ln(x)$, ya que al revés no sirve (compruébelo). Entonces:

$$\int \ln(x)\,dx = \underset{\begin{pmatrix} u = \ln(x) & \therefore du = \frac{1}{x} \\ dv = dx & \therefore v = x \end{pmatrix}}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + k,\ k \in \mathbb{R}$$

$\square$

Observación A veces hay que integrar por partes varias veces hasta terminar. $\square$

Observación Hay casos aparentemente extraños de uso de integración por partes, donde reaparece la integral original, pero en realidad aparece sumado un múltiplo de ella, no la misma. Vea el ejemplo siguiente. $\square$

Ejemplo Calcule $\int \cos^2(x)\,dx$ $\square$

Solución de ejemplo:

$$\int \cos^2(x)\,dx = \underset{\begin{pmatrix} u = \cos(x) & \therefore du = -\operatorname{sen}(x)\,dx \\ dv = \cos(x)\,dx & \therefore v = \operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} = \cos(x)\operatorname{sen}(x) - \int -\operatorname{sen}^2(x)\,dx$$

$$= \cos(x)\operatorname{sen}(x) + \int (1 - \cos^2(x))dx = \cos(x)\operatorname{sen}(x) + x - \int \cos^2(x)\,dx$$

y entonces agrupamos las apariciones de $\int \cos^2(x)\,dx$, cuidando de no cometer errores conceptuales (incorporando la constante de integración)

$$2\int \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\operatorname{sen}(x) + x + k,\ k \in \mathbb{R}$$

por lo cual obtenemos finalmente

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{x}{2} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

$\square$

3.1. Integrales por sustitución y/o por partes

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int xe^{-2x}\,dx$

b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int \frac{2x}{(9-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

d) $\int \Big(4x^{-3}+27\,\mathrm{sen}(6x)\Big)dx$

e) $\int \Big(x^{\frac{5}{2}}+\frac{23x}{\sqrt{9-x^2}}\Big)dx$

f) $\int \frac{7x}{\sqrt{6-x^2}}dx$

g) $\int \Big(x(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{-1}{2}})-5\Big)dx$

h) $\int \Big(\frac{5\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-e^{7x}\Big)dx$

i) $\int \Big(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\Big)^2dx$

j) $\int x^2e^{-x}\,dx$

k) $\int \left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{23x}{\sqrt{9-x^2}}\right)\,dx$

l) $\int \left(\frac{2\pi y}{\sqrt{2+3y}}+\ln(2y)\right)\,dy$

m) $\int \cos^3(x)\,\mathrm{sen}\,(x)dx$

n) $\int \tan(x)\sec^2(x)dx$

ñ) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$

o) $\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{\cos x}}dx$

p) $\int \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-8x+3}}dx$ Resp

q) $\int \frac{x}{(25-x^2)^{3/2}}dx$

r) $\int x^3\sqrt{x^2-4}dx$

s) $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$

t) $\int x^3\cdot e^{1+x^2}\,dx$ Resp

u) $\int x^2\cos(x)dx$

v) $\int \cos(2x)\sqrt{\mathrm{sen}(2x)}dx$

w) $\int x\,\mathrm{sen}(3x)dx$

x) $\int \ln(x)\,dx$

2. Disfrute calculando las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{1}{x}(1+\ln(x))^5\,dx$

b) $\int \frac{\cos(\theta)}{1+\mathrm{sen}(\theta)}\,d\theta$

c) $\int e^{2x}\,\mathrm{sen}(3x)\,dx$ Resp

d) $\int \frac{13x}{(9-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

e) $\int xe^{-x^2}\,dx$

f) $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

g) $\displaystyle\int xe^{5x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int t(\ln(t))^2\,dt$

i) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{xe^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

m) $\displaystyle\int 7^x\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

ñ) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$