Problema 1. Calcule para la función $f : [-2, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x > 3, \\ x^2 - 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

- $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (0,5 pts)
- $f(\sqrt{2})$ (0,5 pts)
- $f(2) + f(5)$ (0,5 pts)
- El recorrido de f (1,5 pts)

• Notamos que $-2 \leq \frac{1}{2} \leq 3$, luego

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

• Notamos que $2 < 4$, luego por la monotonía de la raíz cuadrada $\sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$. En particular $\sqrt{2} < 3$ luego $-2 \leq \sqrt{2} \leq 3$, así

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$$

• Podemos ver $-2 \leq 2 \leq 3$ y $5 > 3$

Así, $f(2) = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ y $f(5) = 3(5) - 1 = 14$

Por tal $f(2) + f(5) = 2 + 14 = 16$.

• Sea $f_1 : (3, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_1(x) = 3x - 1$$

Sea $f_2 : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_2(x) = x^2 - 2.$$

Podemos ver que $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \text{ si } x > 3 \\ f_2(x & , \text{ si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Luego $Rec(f) = Rec(f_1) \cup Rec(f_2)$

$Rec(f_1) = \{ y \in \mathbb{R} : y = 3x - 1 , \text{ para } x > 3 \}$

Realizando movimientos algebraicos:

$$y = 3x - 1 \quad \text{es igual a} \quad x = \frac{y+1}{3}$$

Dado que $x > 3$, tenemos que $\frac{y+1}{3} > 3$

Luego, $\frac{y+1}{3} > 3 \iff y > 8$, es decir,

$$Rec(f_1) = \{ y \in \mathbb{R} : y > 8 \} = (8, \infty)$$

Por otra parte, revisando $Rec(f_2)$

$Rec(f_2) = \{ y \in \mathbb{R} : y = x^2 - 2 \ , \ \text{para } -2 \leq x \leq 3 \}$

Donde $y = x^2 - 2$ es igual $\sqrt{y+2} = x$

Dado que $\sqrt{y+2} \geq 0$ y que $-2 \leq x \leq 3$

tenemos que $0 \leq \sqrt{y+2} \leq 3 \iff -2 \leq y \leq 7$

Luego $Rec(f_2) = \{ y \in \mathbb{R} : -2 \leq y \leq 7 \} = [-2, 7]$

Así $Rec(f) = Rec(f_1) \cup Rec(f_2)$
$= (8, \infty) \cup [-2, 7]$

Por lo tanto $Rec(f) = [-2, 7] \cup (8, +\infty)$

Problema 2. Calcule $f+g$, fg, y $\frac{f}{g}$ para las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = 2x - 5$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x<0, \\ \frac{x}{3} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Determine el dominio de cada una de estas funciones.

1 pto por función

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Donde, dado que $g(x)$ varía de acuerdo al valor de x, separaremos en casos:

- Si $x<0$

$f(x)+g(x) = 2x-5+3-x = x-2$

- Si $x \geq 0$

$f(x)+g(x) = 2x-5+\frac{x}{3} = \frac{7x-15}{3}$

Así, $(f+g)(x) = \begin{cases} x-2, & \text{si } x<0 \\ \frac{7x-15}{3}, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

Recordando: $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) + \mathrm{Dom}(g)$

Luego, dado que $Dom(f) = Dom(g) = \mathbb{R}$

$$Dom(f+g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Por lo tanto $Dom(f+g) = \mathbb{R}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Nuevamente, separaremos en dos casos

- $x < 0$

$$f(x) \cdot g(x) = (2x-5) \cdot (3-x) = -2x^2 + 11x - 15$$

- $x \geq 0$

$$f(x) \cdot g(x) = (2x-5) \cdot \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{2x^2 - 5x}{3}$$

Así $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} -2x^2 + 11x - 15, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x^2 - 5x}{3}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Del mismo modo $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Por lo tanto $Dom(f \cdot g) = \mathbb{R}$

Por último $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x) \neq 0$.

Nuevamente, separaremos en casos

- $x < 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-5}{3-x} \quad , \text{ con } 3-x \neq 0$$

- $x \geq 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-5}{\frac{x}{3}} = \frac{6x-15}{x} \quad , \text{ con } x \neq 0$$

Así $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in Dom(f) \cap Dom(g) : g(x) \neq 0\}$

Podemos ver que $g(x) = 0$, solamente si

$(x < 0$ y $3-x = 0)$ o $(x \geq 0$ y $\frac{x}{3} = 0)$

- $X<0$ y $3-X \iff X<0$ y $X=3$
pero $3>0$, luego no es posible

- $X\geq 0$ y $\frac{X}{3}=0 \iff X\geq 0$ y $X=0$
como $0\geq 0$, luego $g(0)=0$

De esta forma $g(x)=0 \iff x=0$

Así
$$\begin{aligned} Dom\left(\frac{f}{g}\right) &= \{x\in Dom(f)\cap Dom(g) : g(x)\neq 0\} \\ &= \{x\in \mathbb{R} : x\neq 0\} \\ &= (-\infty,0)\cup(0,+\infty) \end{aligned}$$

Por lo tanto $Dom\left(\frac{f}{g}\right)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}-\{0\}$