Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Matemática I

Prof. Leonardo Dinamarca
Ayudante: Alejandro Araya

Ayudantía VI

2 de Octubre, 2024

Ejercicios.

Ejercicio 0.1. Para cada una de las siguientes funciones determine si es inyectiva, y si no lo es, restrinja su dominio de manera de obtener una función inyectiva

I. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$.

II. $g : (\ ]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[\ ) \to \mathbb{R}$, con $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Ejercicio 0.2. Dadas $f : [3, \infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{2x+7}{x-2}$ y $g : [17, \infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 8$.

I. Pruebe que f es inyectiva.

II. Determine $g \circ f$.

Ejercicio 0.3. Para cada una de las siguientes funciones determine su recorrido y si es o no biyectiva. Si lo es, calcules su función inversa.

I. $a : (\mathbb{R} - \{-9/2\}) \to \mathbb{R}$, con $a(x) = \dfrac{1}{2x+9}$.

II. $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $b(x) = 1 - x^2$.

III. $c : (\mathbb{R} - \{-1/2\}) \to \mathbb{R}$, con $c(x) = \dfrac{x+7}{2x+1}$.

Ejercicio 0.4. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & , \text{si } x < 0 \\ x^3+2 & , \text{si } 0 \leq x \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 3x-2 & , \text{si } x \leq -1 \\ x^2-1 & , \text{si } -1 < x \end{cases}$ Determine si f es biyectiva, si g es biyectiva y encuentre $(g \circ f)^{-1}$.

Ejercicio 0.5. Propuestos

I. Recordando una conversación anterior tenemos que el conjunto de números Naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ y el conjunto de números naturales pares $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$. No es difícil ver que $2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$, pero es posible determinar que $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$, para ello demuestre que $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n$ es una función biyectiva.

II. Es posible ver que la composición de funciones inyectivas es inyectiva, lo mismo ocurre con la composición de funciones sobreyectivas o biyectivas. Pero ¿Qué ocurre cuando compone una función f inyectiva y una función g sobreyectiva?, ¿Es $(g \circ f)$ inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o no será nada?.

III. Piense en la función "no hacer nada", es decir, la identidad $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $id(x) = x$. Concluya que es biyectiva, sin demostrar que es inyectiva y sobreyectiva.