

## ejercicios

1. (a) Suponiendo que las moléculas de Hidrógeno tienen una velocidad cuadrática media (rms) de 1,270 m/s a 300 K, calcule la rms a 600 K.  
(b) Estime la temperatura a la cual la velocidad cuadrática media de las moléculas de nitrógeno en la atmósfera es igual a la velocidad de escape del campo gravitacional de la Tierra. (masa atómica Nitrógeno=14, radio Tierra=6,400 km).
2. Un sistema posee niveles de energía no-degenerados con energía  $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ , donde  $\hbar\omega = 8.625 \times 10^{-5} \text{ eV}$ , y  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 
  - (a) Calcule la probabilidad  $P_{10}$  de que el sistema esté en el estado  $n = 10$  si esta en contacto con un baño térmico a temperatura ambiente ( $T = 300\text{K}$ ).
  - (b) Cual será la probabilidad  $P_{10}$  en los casos límites de temperatura muy bajas y muy altas?
  - (c) A que temperatura se maximizara  $P_{10}$ ? Para tal temperatura calcule  $P_{10}$ .

$$[1] (a) \quad v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{3KT_1}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{3KT_1}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m}{3KT_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{3KT_2}{m}}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} v_1 = \sqrt{\frac{600}{300}} \times 1,270 = \boxed{1,796 \left[ \frac{m}{s} \right]}$$

$$[b) \quad v_{rms} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

$$\frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{GMm}{R} \Rightarrow v_c^2 = \frac{2GM}{R} = 2R \underbrace{\left( \frac{GM}{R^2} \right)}_g = 2gR$$

$$v_{rms} = v_c \Rightarrow \left( \frac{3KT}{m} \right)^{1/2} = (2gR)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{3KT}{m} = 2gR \Rightarrow T = \frac{2mgR}{3K}$$

$$\begin{matrix} N_0 \rightarrow 14g \\ 1 \rightarrow x \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{14}{6,02 \times 10^{23}} = 2,33 \times 10^{-23} \text{ g}$$

$$[2] E_n = (n + \frac{1}{2}) h\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_n = A e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})h\omega}{kT}} = A e^{-\frac{h\omega}{2kT}} e^{-\frac{n h\omega}{kT}}$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\frac{h\omega}{2kT}} e^{-\frac{n h\omega}{kT}} = A e^{-\frac{h\omega}{2kT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n h\omega}{kT}}$$

$$S = 1 + e^{-\frac{h\omega}{kT}} + e^{-\frac{2h\omega}{kT}} + \dots$$

$$e^{-\frac{h\omega}{kT}} S = e^{-\frac{h\omega}{kT}} + e^{-\frac{2h\omega}{kT}} + \dots$$

$$S(1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}) = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}}$$

$$1 = \frac{A e^{-\frac{h\omega}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}} = \frac{A e^{-\frac{h\omega}{2kT}}}{e^{-\frac{h\omega}{kT}} (e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1)} = \frac{A e^{\frac{h\omega}{2kT}}}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}$$

$$\Rightarrow A = (e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{h\omega}{2kT}}$$

$$P_n = (e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{h\omega}{2kT}} \times e^{-\frac{n h\omega}{kT}}$$

$$(e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{h\omega}{kT}} e^{-\frac{n h\omega}{kT}} = (1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}) e^{-\frac{n h\omega}{kT}}$$

$$\frac{h\omega}{kT} = \frac{1.0}{300} \quad P_{10} = (1 - e^{-0.0033}) e^{-\frac{10}{300}} = 0.00321$$

$$P_n = (1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}) e^{-\frac{nh\omega}{kT}}$$

$$T \rightarrow 0 \quad e^{-\frac{h\omega}{kT}} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad e^{-\frac{nh\omega}{kT}} \rightarrow 0 \quad (\text{except at } n=0)$$

$$\boxed{P_{10}(T \rightarrow 0) = 0}$$

$$T \rightarrow \infty, \quad e^{-\frac{h\omega}{kT}} \rightarrow 1, \quad e^{-\frac{nh\omega}{kT}} \rightarrow 1 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{10}(T \rightarrow \infty) = 0}$$

$$P_n = (1 - e^{-\beta}) e^{-n\beta}$$

$$\beta = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$P_{10} = (1 - e^{-\beta}) e^{-10\beta}$$

$$0 = \frac{dP_{10}}{dT} = \frac{d\beta}{dT} \cdot \frac{dP_{10}}{d\beta} = -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \left\{ e^{-\beta-10\beta} + (1 - e^{-\beta})(-10)e^{-10\beta} \right\}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{kT^2} e^{-10\beta} [e^{-\beta} + (1 - e^{-\beta})(-10)]$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{kT^2} e^{-10\beta} [e^{-\beta} - 10 + 10e^{-\beta}]$$

$$[11e^{-\beta} - 10]$$

$$\Rightarrow 11e^{-\beta} = 10 \Rightarrow e^{-\beta} = \frac{10}{11} \Rightarrow$$

$$-\beta = \ln(10/11)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \ln(11/10)}$$

$$\therefore \frac{\hbar\omega}{kT} = \ln(11/10) \Rightarrow T = \frac{\hbar\omega}{k \ln(11/10)} = \frac{1}{\ln(11/10)} = \boxed{10.5}$$

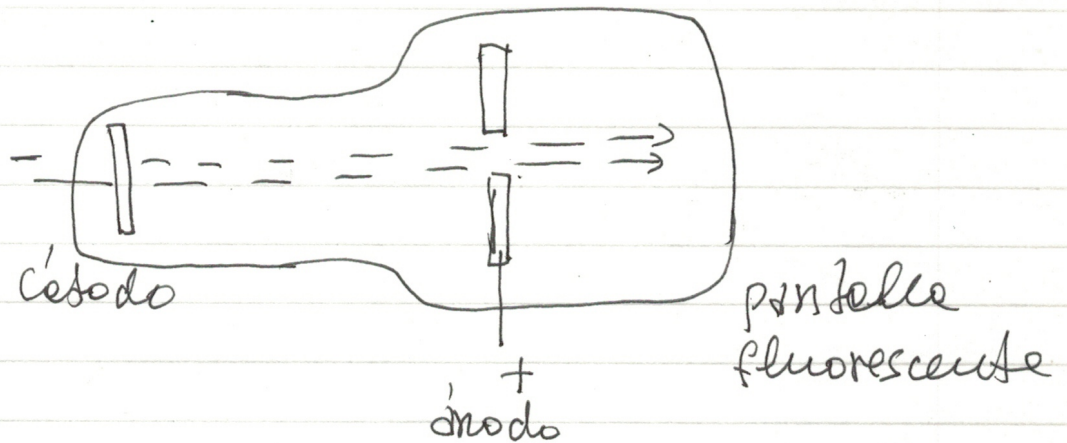
conocido

$$P_{10} = (1 - e^{-\beta}) e^{-10\beta} = (1 - e^{-\ln(11/10)}) e^{-10 \ln(11/10)} = \boxed{0.035}$$

$$\Rightarrow 3.5\%$$

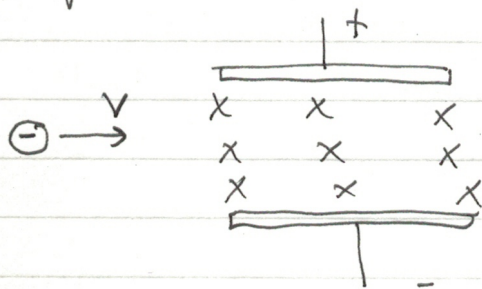
# EL Electrón: "átomo de electricidad"

Rayos Catódicos:



rayos pueden desviarse con  $\vec{B}$ .

J.J. Thompson (1897) midió  $e/m$ :



$$eVB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{e}{m} = \frac{v}{RB}}$$

F. Lorentz

se ajusta el  $\vec{E}$  externo hasta lograr cero deflexión

$$\Rightarrow eE = eVB \Rightarrow \boxed{v = E/B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{e}{m} = \frac{E}{RB^2}} \approx 10^8 \text{ C/g}$$

Grande comparado con  $\left(\frac{e}{m}\right)_H = 96500 \text{ C/g}$ .

# Mediendo la carga del electrón

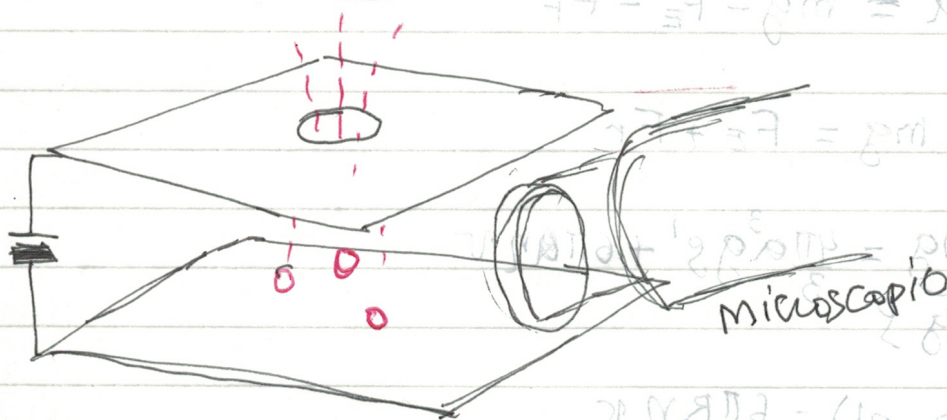
preliminar: gota de fluido, densidad  $\rho$ , radio  $a$ ,  
cargada en un medio densidad  $\rho'$ , viscosidad  $\eta$

veloc. terminal: 
$$V_g = \frac{(2/9) g a^2 (\rho - \rho')}{\eta} \quad (1)$$

ley de Stokes

Derivación: ejercicio

1906: Robert Millikan: medición directa de  $e$



gotas de aceite cargadas eléctricamente. con entre 2 placas metálicas sobre las cuales se aplica un voltaje conocido.

$\vec{E} = 0$

$F_v$  medio viscoso  $F = -a v$   $\mu$  masa efectiva gota

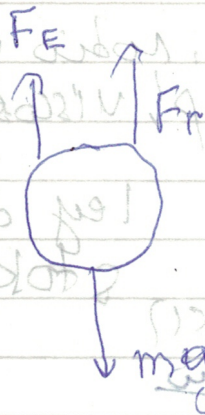
$V_g = K F_v = K \mu g \quad (2)$

$\mu = \frac{4\pi}{3} a^3 (\rho - \rho')$   $\leftarrow$  aceite  $\leftarrow$  aire  $(3)$

comparando con (1)  $\Rightarrow K = 1/(6\pi\eta a) \quad (4)$

Mediendo  $V_g \rightarrow$  determinando  $a \rightarrow$  dot.  $\mu$  y  $K$

## derivacion de la ley de Stokes



$$mg = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho g$$

$$F_E = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho' g$$

$$F_r = 6\pi R \eta v$$

verdadera ley de Stokes

$$ma = mg - F_E - F_r$$

$$\text{Si } v = v_g \Rightarrow mg = F_E + F_r$$

$$mg = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho g = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho' g + 6\pi R \eta v$$

$$\frac{4\pi}{3} a^3 g (\rho - \rho') = 6\pi R \eta v$$

$$v = \frac{\frac{4\pi}{3} a^3 g (\rho - \rho')}{6\pi R \eta} = \left(\frac{2}{9}\right) g (\rho - \rho') \frac{a^2}{\eta}$$

$$v = \frac{2}{9} g (\rho - \rho') \frac{a^2}{\eta}$$

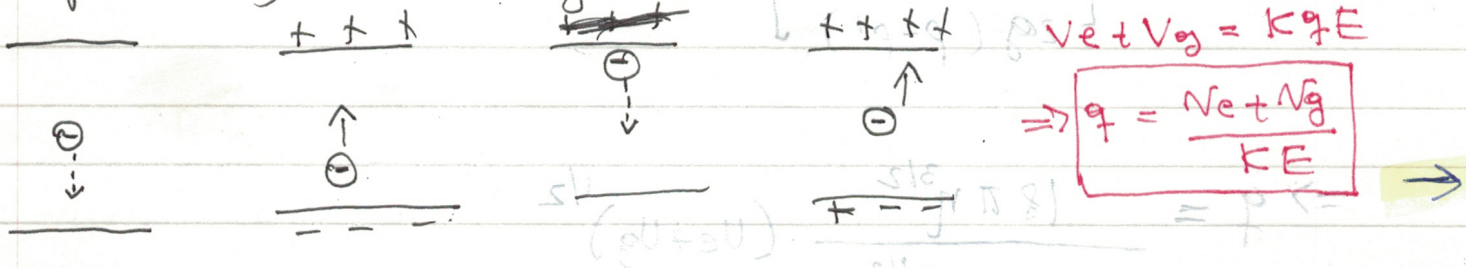
$$v = \frac{2}{9} g (\rho - \rho') \frac{a^2}{\eta}$$

$$v = \frac{2}{9} g (\rho - \rho') \frac{a^2}{\eta}$$

La carga total en la gota se del. de medicación de  $V_g$  en presencia de  $E$ :

$$V_e = K(Eq - \mu g) \quad \checkmark$$

Se sigue a una gota individual a través de un ciclo de aplicación de voltaje:



Ocasionalmente, la gota cambia su carga total debido a colisiones con las moléculas de aire

$$V_{e1} = K(Eq_1 - \mu g)$$

$$V_{e2} = K(Eq_2 - \mu g)$$

$$\Rightarrow V_{e1} - V_{e2} = K(Eq_1 - Eq_2) \Rightarrow q_1 - q_2 = \left( \frac{V_{e2} - V_{e1}}{KE} \right)$$

se encuentra que  $q_1 - q_2 \approx Ne$   
También se halló que  $q \approx Ne$ .

P. Nobel 1923

die Spannung ist in der Mitte der Elektroden  
 die Elektroden sind positiv geladen

$$q = \frac{(V_e + V_g) \cdot 6\pi n \eta}{E}$$

$$V_e = K(E \phi - \eta \phi) \quad V_g = K(E \phi - \eta \phi)$$

die Spannung ist in der Mitte der Elektroden  
 die Elektroden sind positiv geladen

$$\text{but } \alpha = \left[ \frac{q V_g \eta}{2g(p-p')} \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{V_e + V_g}{KE}$$

$$q = \frac{18\pi \eta^{3/2} \cdot (V_e + V_g)^{1/2}}{[2g(p-p')]^{1/2} E}$$

REDO

die Spannung ist in der Mitte der Elektroden  
 die Elektroden sind positiv geladen

$$V_e = K(E \phi - \eta \phi) \quad V_g = K(E \phi - \eta \phi)$$

$$\Rightarrow V_e - V_g = K(E \phi - \eta \phi) - K(E \phi - \eta \phi) = 0$$

weiter

die Spannung ist in der Mitte der Elektroden  
 die Elektroden sind positiv geladen

$$V_e = K(E \phi - \eta \phi) \quad V_g = K(E \phi - \eta \phi)$$