Ayudantía

1) Use división de polinomios y el método de fracciones parciales para calcular

$$\int \frac{4x^4 - 8x^3 - 59x^2 + x + 2}{(x-5)(x+3)}\, dx$$

Como grado $(4x^2 - 8x^3 - 59x^2 + x + 2) = 4 \not< 2 = $ grado$((x-5)\cdot(x+3))$ el método de ecuaciones parciales no puede aplicarse directamente, pero sí se puede aplicar luego de dividir polinomios, al usar como numerador el resto de la división considerando $(x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15$, se tiene:

- $4x^4 - 8x^3 - 59x^2 + x + 2 : x^2 - 2x - 15$

  - $4x^4 - 8x^3 - 59x^2 + x + 2 - 4x^2(x^2 - 2x - 15) = \cancel{4x^4} - \cancel{8x^3} - 59x^2 + x + 2 - \cancel{4x^4} + \cancel{8x^3} + 60x^2 = +x^2 + x + 2$

  - $x^2 + x + 2 - 1(x^2 - 2x - 15) = \cancel{x^2} + x + 2 - \cancel{x^2} + 2x + 15 = 3x + 17$

como grado $(3x + 17)$ $1 < 2$ grado $(x^2 - 2x - 15)$ el proceso no continúa y se tiene que el cociente es $4x^2 + 1$ y el resto $3x + 17$

Entonces

$$\frac{4x^4 - 8x^3 - 59x^2 + x + 2}{(x-5)(x+3)} = \frac{(x^2 - 2x - 15)(4x^2 + 1) + (3x + 17)}{(x-5)(x+3)} = \frac{(x^2 - 2x - 15)(4x^2 + 1)}{(x-5)(x+3)} + \frac{(3x + 17)}{(x-5)(x+3)}$$

$$= (4x^2 + 1) + \frac{(3x + 17)}{(x-5)\cdot(x+3)}$$

Luego, como grado $(3x + 17) = 1 < 2 = $ grado $((x-5)(x+3))$ se pueden usar fracciones parciales en $\frac{(3x+17)}{(x-5)(x+3)}$, por lo que existen constantes A y B tales que

$$\frac{(3x + 17)}{(x-5)(x+5)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}$$

es decir

$$\frac{(3x + 17)}{(x-5)(x+5)} = \frac{A(x+3) + B(x-5)}{(x-5)\cdot(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A - 5B)}{(x-5)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, se concluye que los numeradores deben ser iguales (independientemente del valor de x), es decir:

$$3x + 17 = (A+B)x + (3A - 5B)$$

Por lo que se debe cumplir en los coeficientes respectivos sean iguales

$$[A + B = 3 \wedge 3A - 5B = 17] \iff [B = 3 - A \wedge 3A - 5(3-A) = 17]$$
$$[B = 3 - A \wedge 8A = 32]$$
$$[B = 3 - 4 = -1 \wedge A = 4]$$

Luego:

$$\frac{(3x+17)}{(x-5)(x+3)} = \frac{4}{x-5} + \frac{-1}{x+3}$$

Por lo cual:

$$\frac{4x^4 - 8x^3 - 59x^2 + x + 2}{(x-5)(x+3)} = (4x^2 + 1) + \frac{4}{x-5} + \frac{-1}{x+3}$$

Finalmente

$$\int \frac{4x^2 - 8x^3 - 59x^2 + x + 2}{(x-5)(x+3)}\,dx = \int 4x^2 + 1\,dx + 4 \cdot \int \frac{1}{x-5}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{4x^3}{3} + x + 4 \cdot \ln(|x-5|) - \ln(|x+3|) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2) Divida $3x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 3x - 20$ por $3x^2 - 5$ escribiendo el primer polinomio respecto de cociente y resto

Se tiene

- $3x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 3x - 20 - x^2(3x^2 - 5) = \cancel{3x^4} + 3x^3 + 10x^2 - 3x - 20 - \cancel{3x^4} + 5x^2 = 3x^3 + 15x^2 - 3x - 20$

- $3x^3 + 15x^2 - 3x - 20 - x(3x^2 - 5) = \cancel{3x^3} + 15x^2 - 3x - 20 - \cancel{3x^3} + 5x = 15x^2 + 2x - 20$

- $15x^2 + 2x - 20 - 5(3x^2 - 5) = \cancel{15x^2} + 2x - 20 - \cancel{15x^2} + 25 = 2x + 5$

Como grado $(2x+5) = 1 < 2 =$ grado $(3x^2 - 5)$ el proceso no continúa y se obtiene que el cociente es $x^2 + x + 5$ y el resto es $2x + 5$ de modo que:

$$3x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 3x - 20 = (x^2 + x + 5)(3x^2 - 5) + (2x + 5)$$

3) Use el método de fracciones parciales para calcular

$$\int \frac{3x^3-2x^2-28x-98}{x^2-3x-4}\,dx$$

Como grado $(3x^3-2x^2-28x-98) = 3 \not< 2 =$ grado (x^2-3x-4) el método de fracciones parciales no puede aplicarse directamente, pero sí se puede aplicar luego de dividir polinomios, al usar como numerador el resto de la división.

Entonces

- $3x^3-2x^2-28x-98-3x(x^2-3x-4) = \cancel{3x^3}-2x^2-28x-98-\cancel{3x^3}+9x^2+12x = 7x^2-16x-98$

- $7x^2-16x-98-7(x^2-3x-4) = \cancel{7x^2}-16x-98-\cancel{7x^2}+21x+28 = 5x-70$

Como grado $(5x-70) = 1 < 2 =$ grado (x^2-3x-4) el proceso no continua y se obtiene el cociente $3x-7$ y el resto $5x-70$, de modo que $3x^2-2x^2-28x-98-3x = (x^2-3x-4)(3x-7)+(5x-70)$

Entonces

$$\frac{3x^3-2x^2-28x-3x}{x^2-3x-4} = \frac{(x^2-3x-4)(3x-7)+(5x-70)}{(x^2-3x-4)}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2-3x-4)}(3x-7)}{\cancel{x^2-3x-4}} + \frac{5x-70}{x^2-3x-4} = 3x-7+\frac{5x-70}{x^2-3x-4}$$

Luego

$$\int \frac{3x^3-2x^2-28x-98}{x^2-3x-4}\,dx = \int 3x-7+\frac{5x-70}{x^2-3x-4}\,dx$$

$$= \int(3x-7)\,dx + \int\frac{(5x-70)}{x^2-3x-4}\,dx = \frac{3x^2}{2}+7x+\int\frac{5x-70}{x^2-3x-4}$$

Ahora se aplican fracciones parciales para calcular la última integral ya que grado $(5x-70) = 1 < 2 =$ grado (x^2-3x-4) y $x^2-3x-4 = (x+1)(x-4)$ por lo que existen constantes A y B tales que

$$\frac{5x-70}{x^2-3x-4} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-4)}$$

es decir:

$$\frac{5x-70}{x^2-3x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{(A+B)x+(4A+B)}{(x+1)(x-4)}$$

y se obtiene que independiente de los valores de x, se debe cumplir

$$5x-70 = (A+B)\cdot x + (-4A+B)$$

De modo que A y B deben cumplir

$$[A+B=5 \ \wedge\ -4A+B=-70] \iff [B=5-A \ \wedge\ -4A+(5-A)=-70$$
$$[B=5-A \ \wedge\ -5A=-75]$$
$$[B=5-15 \ \wedge\ -10 \wedge\ A=15$$

De modo que

$$\frac{(5x-70)}{x^2-3x-4}=\frac{15}{(x+1)}+\frac{-10}{(x-4)}$$

Integrando:

$$\int\frac{(5x-70)}{x^2-3x-4}\,dx=\int\left(\frac{15}{x+1}+\frac{-10}{x-4}\right)dx=15\cdot\int\frac{1}{x+1}dx+-10\cdot\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=15\cdot\ln(|x+1|)-10\cdot\ln(|x-4|)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

Finalmente la integral pedida es:

$$\int\frac{3x^3-2x^2-28x-98}{x^2-3x-4}\,dx=\frac{3x^2}{2}+7x+\int\frac{(5x-70)}{x^2-3x-4}\,dx$$

$$=\frac{3x^2}{2}+7x+15\cdot\ln(|x+1|)-10\cdot\ln(|x-4|)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

4) Calcule $\sum_{J=1}^{123}(3J-5)$

Se tiene:

$$\sum_{J=1}^{123}(3J-5)=\sum_{J=1}^{123}(3J)-\sum_{J=1}^{123}(5)=3\left(\sum_{J=1}^{123}J\right)-\left(\sum_{J=1}^{123}5\right)$$

$$=3\cdot\left(\frac{123\cdot 124}{2}\right)-5\cdot 123$$

5) Calcule $\sum_{J=30}^{1933}(J+7)$

Se tiene

$$\sum_{J=30}^{1933}(J+7)=\left(\sum_{J=30}^{1933}J\right)+\left(\sum_{J=30}^{1933}7\right)=\left(\left(\sum_{J=1}^{1933}J\right)-\left(\sum_{J=1}^{29}J\right)\right)+7\cdot(1+(1933-30))$$

$$=\left(\frac{1933\cdot 1934}{2}-\frac{29\cdot 30}{2}\right)+7\cdot 1904$$