# TALLER 2: SOBRE LA SUCESIÓN DE FAREY

**Definición** Sea $n$ un entero positivo. La sucesión de Farey de grado $n$ es el conjunto $F_n$ de números racionales $\frac{p}{q}$ con enteros $0 \leq p \leq q \leq n$ tal que $\gcd(p, q) = 1$, ordenados de manera creciente.

**Ejemplos**

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\},$$

$$F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\},$$

$$F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\},$$

$$F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}.$$

**Ejerc. 1** Escriba los elementos de $F_5$ y $F_6$.

**Ejerc. 2** Demuestre que $F_{n-1} \subseteq F_n$ para todo $n \geq 2$.

**Ejerc. 3** Basado en los ejemplos, haga una conjetura acerca de la cardinalidad de cada $F_n$. Demuestre su conjetura.

**Ejerc. 4** Sean $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dos vecinos inmediatos en la sucesión de Farey $F_n$. Según los ejemplos anteriores, ¿que puede decir de los números

$$bc - ad \text{ ?}$$

**Obs.** No es dificil ver que cada par de fracciones $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ en $F_n$ satisfacen $0 < bc - ad \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, se puede probar que cada par de fracciones $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ que son vecinos inmediatos en una sucesión de Farey $F_n$, se tiene que $bc - ad = 1$.

En lo que sigue asumimos estos hechos, aunque no tengamos su demostración.

---

*Date*: 15 de Octubre de 2024.

**Ejerc. 5** Sean $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dos vecinos inmediatos en la sucesión de Farey $F_n$. Demuestre que

$$\left\{\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right\} \subseteq F_{b+d} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

**Ejerc. 6** Sean $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dos vecinos inmediatos en la sucesión de Farey $F_n$. Demuestre que $b + d > n$.

**Ejerc. 7** Sean $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dos vecinos inmediatos en la sucesión de Farey $F_n$. Demuestre que una de las dos alternativas siguientes se debe cumplir:

i) no hay una fracción $\frac{x}{y} \in F_{n+1}$ tal que $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$,

ó

ii) existe una única fracción $\frac{x}{y} \in F_{n+1}$ tal que $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} \leq \frac{c}{d}$. A saber

$$\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}.$$

(Sug.: Suponga que i) no se cumple, y por lo tanto pruebe ii). Es decir, asuma la existencia de algún $\frac{x}{y} \in F_{n+1}$ tal que

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d},$$

y demuestre que se debe tener $y = b + d$, $x = a + c$. Para ello muestre que $1 \leq bx - ay \in \mathbb{Z}$, $1 \leq cy - dx$, y estudie la expresión $\frac{c}{d} - \frac{x}{y} + \frac{x}{y} - \frac{a}{b}$ para obtener $x, y$.)

**Ejerc. 8** Describa en un párrafo de pocas lineas como obtener el conjunto $F_{n+1}$ a partir de $F_n$.

**Ejerc. 5**

Como $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son vecinos inmediatos, tenemos $bc - ad = 1$. Entonces

$$b(a+c) - a(b+d) = ba + bc - ab - ad = bc - ad = 1$$

Por lo tanto, $\gcd(a+c, b+d) = 1$. Esto implica $\frac{a+c}{b+d} \in F_{b+d}$.

Por otro lado $0 < b, d < b+d$, por lo tanto el ejercicio 3 nos dice que

$$F_b \subseteq F_{b+d} \quad \text{y} \quad F_d \subseteq F_{b+d}$$

Como claramente $\frac{a}{b} \in F_b$ y $\frac{c}{d} \in F_d$, concluimos

$$\left\{ \frac{a}{b},\ \frac{a+c}{b+d},\ \frac{c}{d} \right\} \subset F_{b+d}$$

Para la demostración de la desigualdad solo basta notar que $bc - ad = 1$ implica

$$a(b+d) = ab + ad < ab + bc = b(a+c)$$

y

$$(a+c)d = ad + cd < bc + cd = (b+d)c$$

**Ejerc. 6**

Supongamos $b + d = n$. Entonces, por el ejercicio anterior tenemos que

$$\left\{ \frac{a}{b},\ \frac{a+c}{b+d},\ \frac{c}{d} \right\} \subset F_n \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Esto es una contradicción al que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son vecinos inmediatos en $F_n$.

**Ejerc. 7**

Supongamos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ no son vecinos inmediatos en $F_{n+1}$. Entonces debe existir $\frac{x}{y} \in F_{n+1}$ tal que

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$$

Ya que $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$, tenemos $0 < \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{bx - ay}{by}$. Por lo tanto

$$1 \leq bx - ay \in \mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

Similarmente, $\frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ implica $0 < \frac{c}{d} - \frac{x}{y} = \frac{cy - dx}{dy}$. Por lo tanto

$$1 \leq cy - dx \in \mathbb{Z}. \tag{0.2}$$

Por otro lado,

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \left( \frac{c}{d} - \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right) = \frac{cy - dx}{dy} + \frac{bx - ay}{by} \tag{0.3}$$

implica

$$\frac{bc-ad}{bd} \geq \frac{1}{dy} + \frac{1}{by} = \frac{b+d}{bdy} \tag{0.4}$$

Y como $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son vecinos inmediatos en $F_n$, tenemos $bc - ad = 1$. Por lo tanto la desigualdad anterior nos dice que

$$\frac{1}{bd} \geq \frac{b+d}{bdy}, \quad \text{es decir} \quad b+d \leq y$$

Ahora bien, $\frac{x}{y} \in F_{n+1}$ implica $y \leq n+1$. Por lo tanto

$$b+d \leq y \leq n+1$$

Del ejerc. 6 tenemos que $n < b+d$, por lo tanto $n+1 \leq b+d$. De este conjunto de desigualdades concluimos $n+1 \leq b+d \leq y \leq n+1$. Así

$$b+d = y$$

Si ponemos esta igualdad junto a la equación (0.4) obtenemos

$$\frac{1}{bd} = \frac{bc-ad}{bd} \geq \frac{1}{dy} + \frac{1}{by} = \frac{b+d}{bdy} = \frac{1}{bd}$$

Por lo tanto

$$\frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{dy} + \frac{1}{by}$$

Es decir,

$$\frac{cy-dx}{dy} + \frac{bx-ay}{by} = \frac{1}{dy} + \frac{1}{by}$$

(Acá usamos la ecuación (0.3).) Entonces, de esta última ecuación y (0.1) y (0.2) resulta que

$$cy - dx = 1, \qquad bx - ay = 1.$$

De la primera de estas ecuaciones e $y = b+d$ obtenemos

$$c(b+d) - dx = 1 = bc - ad, \quad \text{es decir} \quad d(c-x) = -ad$$

Por lo tanto

$$a + c = x.$$

En resumen, hemos probado lo siguiente: Sean $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dos vecinos inmediatos en $F_n \subseteq F_{n+1}$. Entonces

No hay una fracción en $F_{n+1}$ que esté entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ ó existe una única fracción en $F_{n+1}$ que esté entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, a saber, $\frac{a+c}{b+d}$.