PEMMF.
Estructuras algebraicas
Ayudantías.
Rocío Acevedo

Ayudantía 7 ✹

OBS: Se recomienda revisarlos de forma individual independiente de la solución hecha en ayudantía.

Clases laterales, subgrupos normales y homomorfismos.

1. Demostrar que para $H \leq G$ tenemos $aH = bH \iff b^{-1}a \in H$.

   Dem: $aH = bH \implies b^{-1}a \in H$.

   Que las clases laterales sean iguales implica que todo elemento de aH también está en bH. Se tiene

$$
\begin{aligned}
aH = bH &\iff b^{-1}(aH) = b^{-1}(bH) \\
&\iff (b^{-1}a)H = eH \\
&\iff (b^{-1}a)H = H
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, pertenece a H.

   $aH = bH \impliedby b^{-1}a \in H$.

   Se tiene

$$b^{-1}a = h \iff a = bh$$

   Por tanto, $b \in aH$.

2. Demostrar que el núcleo de un homomorfismo es un subgrupo normal.

   Recordatorio de la definición de homomorfismo: Con H y G grupos, y f un homomorfismo de G sobre H, entonces $ker\phi = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}$.

   Dem de que es subgrupo:

   Se sabe que no es vacío, ya que siempre posee al menos $\phi(e) = e\prime$, y comprueba neutro también. Para la cerradura, definimos $\phi(g_1) = e\prime$ y $\phi(g_2) = e\prime$. Así,

   $$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = e\prime e\prime = e\prime$$

   Y es cerrado. Para inverso, sea $g \in ker(\phi)$, entonces $\phi(g^{-1}) = e\prime$. Ya que $\phi(g) = e\prime$, entonces

   $$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} = (e\prime)^{-1} = e\prime \tag{1}$$

   Por tanto, es subgrupo.

   Demostremos que es subgrupo normal, que implica que para cualquier $g \in G$, $gker(\phi)g^{-1}$, con $k \in Ker$. Se tiene:

   $$\phi(gkg^{-1}) = \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1} = \phi(g)e\prime\phi(g^{-1}) = e\prime \tag{2}$$

   Por tanto, es subgrupo normal.

3. Si H, K subgrupos de G, al menos uno normal, entonces HK es subgrupo de G.

   Dem:

   Sin pérdida de generalidad, supongamos H es subgrupo normal. Denotamos HK de la sig. manera:

   $$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

   No vacío, contiene siempre neutro.

   Cerrado bajo la operación: Sea h_1k_1 y h_2k_2 dos elementos de HK.

   $$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1(k_1h_2)k_2$$

   Ya que H es normal en G, entonces $k_1h_2(k_1)^{-1} \in H \;\; \forall k \in K, h \in H$. Por esto, $k_1h_2 = h_3k_1$, con $k_3 \in H$. Reemplazamos.

   $$h_1(k_1h_2)k_2 = h_1(h_3k_1)k_2.$$

   Lo que entrega la forma hk, que pertenece a HK. Entonces, es cerrado.

   Inverso:

   Sea $hk \in HK$. Al ser H un subgrupo normal en G, entonces $kh^{-1}k^{-1}$. Esto implica $k^{-1}h^{-1} = h_4k^{-1}$, con $h_4 \in H$. Entonces,

   $$(hk)^{-1} = k^{-1}k^{-1} = h_4k^{-1}.$$

   Entonces pertenece a HK.

4. Si $G = (a)$ es un grupo multiplicativo cíclico de orden 30 determine a que grupos corresponde $(a^{10})/(a^{30}), (a^2)/(a^{10})$ y $(a)/(a^2)$.

   El grupo cociente G/N es el conjunto de las clases laterales de N en G. Un elemento del cociente es una clase gN.

   Ejemplo: Con $G = \mathbb{Z}, N = 3\mathbb{Z}$, tenemos 3 clases laterales distintas, por lo que será isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

Para los casos del ejercicio:

$\langle a^{10}\rangle / \langle a^{30}\rangle$

Se tiene que será de orden 3, ya que $\dfrac{n}{mcd(k,n)}$, con k=10 y n=30. Así, el subgrupo $\langle a^{10}\rangle = \{a^0, a^{10}, a^{20}\}$.

0.1 Ayuda Extra para la prueba.

0.1.1 Algunas definiciones útiles.

- Morfismo:Es una función que conserva la operación de grupo. Es decir, $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$.
- Isomorfismo: Es un morfismo que cumple biyectividad, o sea, que conserva la estructura del grupo.
- Clase lateral: Es un subconjunto que desplaza el grupo operándolo con algún elemento de este. Es posible encontrar por la izquierda y derecha. .
- Teorema de Cauchy: Sea G un grupo finito y p primo. Si p divide el orden de G, entonces G tiene un elemento de orden p. .
- Teorema de Lagrange: Sea G un grupo finito y H un subgrupo, entonces el orden de H divide al orden de G.

0.1.2 Algunos ejercicios.

- Sean H y K dos subgrupos de un grupo G con órdenes coprimos, demuestre que su intersección es trivial.

  Dem: Supongamos que $|H| = m$ y $|K| = n$. Sabemos que como su intersección también pertenece al grupo, entonces digamos que $absH \cap K = d$ divide a $|G|$. Entonces es posible decir que d debe dividir a m y n. Pero si m, n son coprimos entonces $d = 1$. Por tanto, el único elemento posible dentro de este subgrupo corresponde a la identidad, que es trivial.
- Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un isomorfismo. Pruebe que lleva cada clase de conjugación en G_1 a una clase de conjugación en G_2.

Queremos demostrar que φ lleva cada clase de conjugación de G_1 a una clase de conjugación de G_2, es decir, si $g \in G_1$, entonces la imagen de la clase de conjugación de g en G_1 bajo φ es una clase de conjugación de G_2. Formalmente, debemos probar que:

$$\varphi\left(\{hgh^{-1} : h \in G_1\}\right) = \{\varphi(h)\varphi(g)\varphi(h)^{-1} : h \in G_1\}$$

Dem:

- Dado que φ es un isomorfismo, preserva el producto de G_1. Específicamente, para cualquier $g, h \in G_1$, se tiene:

  $$\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(h)\varphi(g)\varphi(h^{-1})$$

  Ya que φ es homomorfismo preserva la inversa, entonces $\varphi(h^{-1}) = \varphi(h)^{-1}$. Reescribimos:

  $$\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(h)\varphi(g)\varphi(h)^{-1}$$

  Esto muestra que la imagen del conjugado hgh^{-1} bajo φ es el conjugado de $\varphi(g)$ por $\varphi(h)$.

- Consideramos ahora la clase de conjugación de un elemento $g \in G_1$, que es el conjunto:

  $$\{hgh^{-1} : h \in G_1\}$$

  Si aplicamos φ a cada elemento de esta clase de conjugación, obtenemos:

  $$\{\varphi(hgh^{-1}) : h \in G_1\} = \{\varphi(h)\varphi(g)\varphi(h)^{-1} : h \in G_1\}$$

  Dado que φ es una función biyectiva porque cumple isomorfismo, cuando h recorre todos los elementos de G_1, $\varphi(h)$ recorre todos los elementos de G_2. Por lo tanto, el conjunto:

  $$\{\varphi(h)\varphi(g)\varphi(h)^{-1} : h \in G_1\}$$

  es exactamente la clase de conjugación de $\varphi(g)$ en G_2.