**PEMMF.**
**Estructuras algebraicas**
**Ayudantías.**
**Rocío Acevedo**

UNIVERSIDAD DE CHILE

# Ayudantía 7

OBS: Se recomienda revisarlos de forma individual independiente de la solución hecha en ayudantía.

---

**Matrices, grupos y Teo. de Cayley.**

1. Muestre que los elementos de $GL_n(\mathbb{R})$ con entradas enteras y determinante $1, -1$ forman un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$. Este grupo se denota $GL_n(\mathbb{Z})$.

   Sea $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ el grupo de todas las matrices invertibles $n \times n$ con entradas reales y determinante no nulo:

   $$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

   donde $M_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$.

   El subgrupo a demostrar es $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, y es definido como:

   $$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \in M_n(\mathbb{Z}) \text{ y } \det(A) = \pm 1\},$$

   $$M_n(\mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_{ij} \in \mathbb{Z}, \forall i, j\}.$$

   **Dem:**

   1. El elemento identidad está en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$:

   El elemento identidad de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es la matriz identidad $I_n$, que es la matriz $n \times n$ con 1s en la diagonal y 0s fuera de la diagonal:

   $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

   La matriz identidad tiene entradas enteras y $\det(I_n) = 1$, por lo que $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Así, el elemento identidad está en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

2. Cerrado bajo el producto:

Sean dos matrices $A$ y $B$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Esto significa que $A$ y $B$ tienen entradas enteras y $\det(A), \det(B) = \pm 1$.

P.d que el producto $AB$ también tiene entradas enteras y determinante $\pm 1$.

- Entradas enteras: Si $A$ y $B$ tienen entradas enteras, el producto de dos matrices con entradas enteras también tiene entradas enteras, ya que la multiplicación de enteros da como resultado un entero. Por lo tanto, $AB$ tiene entradas enteras.

- Determinante: Sabemos que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Como $\det(A) = \pm 1$ y $\det(B) = \pm 1$, el determinante de $AB$ es:

$$\det(AB) = (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1.$$

Por lo tanto, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ es cerrado bajo el producto.

3. Cerrado bajo la inversión:

Finalmente, debemos probar que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, entonces $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, es decir, que la inversa de $A$ tiene entradas enteras y determinante $\pm 1$.

- Determinante: Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, entonces $\det(A) = \pm 1$. Por propiedades de los determinantes, el determinante de la inversa de $A$ es:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Dado que $\det(A) = \pm 1$, tenemos que $\det(A^{-1}) = \pm 1$, por lo que $A^{-1}$ tiene determinante $\pm 1$.

- Entradas enteras: Si $A$ es una matriz con entradas enteras y $\det(A) = \pm 1$, entonces $A^{-1}$ también tiene entradas enteras.

Por lo tanto, $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

2. Verifique que el teorema de Cayley aplicado a $\mathbb{R}$ produce el subgrupo de $S_{\mathbb{R}}$ que contiene todas las translaciones de la recta real.

   Recuerdo de teorema de Cayley: Todo grupo $G$ es isomorfo a un subgrupo del grupo simétrico $S_G$, el cual es el grupo de permutaciones de los elementos de $G$.

   Sea la acción de $(\mathbb{R}, +)$ sobre sí mismo mediante traslaciones definiendo la función de traslación $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para un elemento fijo $a \in \mathbb{R}$:

   $$T_a(x) = x + a \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

   Esta traslación $T_a$ es una permutación de $\mathbb{R}$ porque es biyectiva y tiene una inversa que es la traslación $T_{-a}(x) = x - a$.
   La aplicación de una traslación $T_a$ es una permutación del conjunto $\mathbb{R}$, y la composición de dos traslaciones corresponde a sumar los desplazamientos. Es decir, si aplicamos dos traslaciones sucesivas, $T_a$ seguido de $T_b$, tenemos:

   $$T_a \circ T_b(x) = T_a(T_b(x)) = T_a(x + b) = (x + b) + a = x + (a + b).$$

   Esto muestra que la composición de las traslaciones es equivalente a la adición de los elementos $a$ y $b$ en $\mathbb{R}$.
   El teorema de Cayley implica que cada elemento $a \in \mathbb{R}$ se puede representar como la permutación $T_a$ en el grupo de permutaciones $S_{\mathbb{R}}$ (el grupo simétrico de todas las permutaciones de $\mathbb{R}$). Podemos definir un homomorfismo (que mantiene operación) de grupos $\phi : \mathbb{R} \to S_{\mathbb{R}}$ dado por:

   $$\phi(a) = T_a.$$

   Este homomorfismo es inyectivo porque si $T_a = T_b$, entonces $a = b$, lo que implica que $\phi$ es un monomorfismo. Por lo tanto, $(\mathbb{R}, +)$ es isomorfo a un subgrupo de $S_{\mathbb{R}}$, y este subgrupo está compuesto por las traslaciones de la forma $T_a$ para $a \in \mathbb{R}$.

3. Sean G y H grupos. Si $(a, b) \in G\text{x}H$ con $a$ y $b$ de orden finito $k$ y $h$ respectivamente, entonces el orden de $(a, b) \in G\text{x}H$ es el $mcm(k, h)$.

   **Dem:**

   Se tiene que $a^k = e_G$ y $b^h = e_H$. Hay que encontrar el menor $m$ tal que $(a^m, b^m) = (e_G, e_H)$.

   Ya que k es el orden de a, con $n \in \mathbb{R}$. También, para b, con $l \in \mathbb{Z}$ se tiene

   $$a^m = a^{k*n}$$
   $$b^m = b^{h*l}.$$

   El valor más pequeño de $m$ debe cumplir que sea múltiplo tanto de $k$ como de $h$, por lo que necesariamente debe ser su $mcm$. Por lo tanto, el orden de $(a, b)$ es $mcm(k, h)$.