PEMMF.
Estructuras algebraicas
Ayudantías.
Rocío Acevedo

UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 6 ✹

OBS: Se recomienda revisarlos de forma individual independiente de la solución hecha en ayudantía.

Isomorfismos, matrices y permutaciones.

1. Encuentre un subgrupo de orden 6 en S_4. ¿Cuántos hay?

   Resolución: Primero debemos corroborar que exista un grupo de orden 6. Se tiene que el orden del grupo S_4 corresponde a 4!, que es 24. Por teorema de Lagrange, 24 es divisible por 6, por lo que existen grupos de orden 6.

   Ahora, revisemos los elementos del subgrupo. Sabemos que para que sea subgrupo siempre debe tener al menos la identidad, un elemento y su inverso. Así, para encontrar uno de los subgrupos elegimos el elemento identidad y una permutación que mueva tres elementos dentro de S_4, y su inverso. Así, se tiene

   $$F = \{(), (123), (132)\}$$

   Ahora que tenemos los elementos "más difíciles de encontrar", rellenamos los que faltan con los que son inversos de sí mismo, que son $(12), (13), (23)$. Así, un subgrupo de orden 6 corresponde a

   $$F = \{(), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

   Para encontrar los subgrupos de S_4, se debe dejar fijo un elemento y seguir la misma estructura que el ya hecho. Así, los subgrupos serán los siguientes:

   $$F = \{(), (12), (14), (24), (124), (142)\}$$

   $$F = \{(), (13), (14), (34), (134), (143)\}$$

   $$F = \{(), (23), (24), (34), (234), (243)\}$$

   Así, son 4 los subgrupos de orden 6 en S_4.

2. Pruebe que el orden de un elemento α de S_n es el mínimo común múltiplo de los largos de los ciclos obtenidos al escribir α como producto de permutaciones cíclicas disjuntas.

   Dem:

   Debemos demostrar dos cosas: primero, que el orden de (α) es un múltiplo de k_i para cada i

   Sea $ord(\alpha) = m$, es decir, $\alpha^m = e$. Esto implica que $\sigma_i^m = e$ para cada i, ya que

   $$\alpha^m = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r)^m = \sigma_1^m \sigma_2^m \dots \sigma_r^m = e.$$

   Dado que σ_i es un ciclo de longitud k_i, sabemos que $\sigma_i^{k_i} = e$. Como $\sigma_i^m = e$, esto significa que m debe ser un múltiplo de k_i, es decir:

   $$m \geq \text{mcm}(k_1, k_2, \dots, k_r).$$

   Ahora, es necesario demostrar que $\text{mcm}(k_1, k_2, \dots, k_r)$ es el menor tal valor

   Sea $m_0 = \text{mcm}(k_1, k_2, \dots, k_r)$. Queremos demostrar que $\alpha^{m_0} = e$.

   Aplicamos α m_0 veces. Sabemos que m_0 es un múltiplo de cada k_i, es decir, $m_0 = l_i k_i$ para algún entero l_i. Entonces:

   $$\alpha^{m_0} = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r)^{m_0} = \sigma_1^{m_0} \sigma_2^{m_0} \dots \sigma_r^{m_0}.$$

   Dado que m_0 es un múltiplo de cada k_i, tenemos $\sigma_i^{m_0} = e$ para cada i. Por lo tanto:

   $$\alpha^{m_0} = \alpha^{k_i l_i} = (\alpha^{l_i})^{k_i} = e.$$

   Esto prueba que $o(\alpha) = \text{mcm}(k_1, k_2, \dots, k_r)$, ya que m_0 es el menor entero tal que $\alpha^{m_0} = e$.

3. Muestre que la matriz
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
representa una rotación y encuentre sus ejes de rotación.

Se define como rotación las matrices ortogonales que cumplen

$$A^tA = I$$

y que su $det(A) = 1$.

Comprobemos que sean ortogonales. Primero, calculemos A^t:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora, operemos la transpuesta con A.

$$A^tA = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos su determinante:

$$det(A) = \left| \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right| = 1.$$

Por lo tanto, si es una matriz de rotación.

El eje de rotación es calculado a partir de

$$(R - I)v = 0.$$

Entonces calculamos su eje:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} v = 0$$

$$\implies \begin{aligned} -\frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_3 = 0 \\ -\frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 = 0 \\ -\frac{1}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2 - \frac{1}{3}v_3 = 0 \end{aligned}$$

Así, queda

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 + 2v_3 \\ 2v_1 &= -v_2 + v_3 \\ \implies v_1 &= v_3 \\ v_2 &= -v_3 \end{aligned}$$

Con estos valores, reemplazamos para $\lambda = 1$, quedando

$$v = \begin{pmatrix} v_3 \\ -v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto su eje de rotación será v.