PEMMF.
Estructuras algebraicas
Ayudantías.
Rocío Acevedo

UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 5

OBS: Se recomienda revisarlos de forma individual independiente de la solución hecha en ayudantía.

Isomorfismos y cíclicos.

1. Todo grupo cíclico es abeliano.

   Dem:

   Sea G un grupo cíclico y a generador de G tal que $G =< a >= \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Con g_1, g_2 dos elementos cualquiera de G, existen enteros r y s tal que $g_1 = a^r$ y $g_2 = a^s$. Entonces,

   $$g_1 g_2 = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s a^r = g_2 g_1.$$

2. Demuestre que S_n no es abeliano para $n \geq 3$.

   Dem:

   Sea $\sigma = (ij)$ y $\tau = (jk)$, con $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$. Calculamos en dos casos, $\sigma\tau$ y $\tau\sigma$, evaluando con algún $x \in \{1, 2, ..., n\}$:

   - Si $x = i$, entonces $\tau(x) = x$. Luego, $\sigma(\tau(x)) = \sigma(x) = (ij)(i)$, por lo que i va a j.
   - Si $x = j$, entonces $\tau(x) = (jk)(j)$, por lo que j va a k. También, $\sigma(\tau(x)) = \tau(x)$, por lo que se mantiene, así, j va a k.
   - Si $x = k$, entonces $\tau(x) = (jk)(k)$, por lo que k va a j. También, $\sigma(\tau(x)) = (ij)((jk)(k))$, por lo que se intercambia, así, k va a i.
   - Si $x \neq j, k, i$. Todos quedan fijos.

   Así, $\sigma\tau = (ijk)$.

   Análogo a lo anterior, para $\tau\sigma$:

   - Si $x = i$, entonces $\sigma(x) = (ij)(i)$, por lo que i va a j. Luego, $\tau(\sigma(x)) = (jk)((ij)(i))$, por lo que i va a k.

- Si $x = j$, entonces $\sigma(x) = (ij)(i)$, por lo que j va a i. También, $(\tau(\sigma(x)) = \sigma(x)$, por lo que se mantiene, así, j va a i.
- Si $x = k$, entonces $\sigma(x)$, por lo que se mantiene. También, $\tau(\sigma(x)) = \tau(x) = (jk)(k)$, así, k va a j.
- Si $x \neq j, k, i$. Todos quedan fijos.

Así, $\tau(\sigma) = (ikj)$.

Por lo tanto, $\sigma(\tau) \neq \tau(\sigma)$

3. Sea $\phi : G \to F$ un isomorfismo de grupos. Demuestre que si G es cíclico, F también. Más aún, demuestre que si $G =< a >$, entonces ϕ está completamente determinado por $\phi(a)$. Es decir, si tiene dos $f_1 y f_2$ de G a F tales que $f_1(a) = f_2(a)$, entonces $f_1(x) = f_2(x)$ para todo x en G.

   Dem: Supongamos G cíclico. Por definición, $\forall g \in G$ se tiene $g = a^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene que como ϕ es isomorfismo, entonces

$$\phi(g) = \phi(a^n) = \phi(a)^n$$

   Esto implica que todo elemento de F es potencia de $\phi(a)$, por lo que está generado por este, y por tanto, es cíclico.
   Ahora, teniendo que G es generado por a, y con $x = a^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, se quiere demostrar que si $f_1(a) = f_2(a)$, entonces $f_1(x) = f_2(x)$ para todo x en G.
   Al ser cíclico, se tiene:
   $f_1(x) = f_1(a^n) = (f_1(a))^n$, y
   $f_2(x) = f_2(a^n) = (f_2(a))^n$.
   Por hipótesis, se tiene $f_1(a) = f_2(a)$, así quedando

$$f_1(x) = (f_1(a))^n = (f_2(a))^n = f_2(x).$$

   Por lo tanto, queda demostrado que si G es cíclico entonces F también, y que si $G =< a >$, entonces ϕ está completamente determinado por $\phi(a)$.

4. Sea G grupo. Determine la cantidad de automorfismos (distintos) de los grupos siguientes:

$$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_12, \mathbb{Z}.$$

Un automorfismo es definido como un isomorfismo de un grupo con sí mismo.

Para el caso de los cíclicos, es necesario que el envío del generador de un grupo sea también generador en el otro, ya que en caso contrario, no podría generar todos los elementos del grupo. Sabiendo esto, se tendrá lo siguiente:

- $\mathbb{Z}_2$:

  Al tener sólo dos elementos, es generado sólo por 1, que corresponde al 1. Así, el número de automorfismos corresponde a 1.

- $\mathbb{Z}_6$:

  Los generadores del grupo son los coprimos con 6, que corresponden al 1 y al 5. Así, el número de automorfismos corresponde a 2.

- $\mathbb{Z}_8$:

  Los generadores corresponden a 1, 3, 5 y 7, por lo que posee 4 automorfismos.

- $\mathbb{Z}_{12}$:

  Los generadores corresponden a 1, 5, 7 y 11 por lo que posee 4 automorfismos.

- $\mathbb{Z}$:

  Sólo es posible generarlo con el 1 o el -1, ya que ambos generan los enteros. Así, posee 2 automorfismos.

Visualicemos uno de los isomorfismos de $\mathbb{Z}_6$: