Ayudantía 4

OBS: Se recomienda revisarlos de forma individual independiente de la solución hecha en ayudantía.

Isomorfismos, alternantes y complejos.

1. Demuestre que todo grupo G de orden 4 es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o V, el grupo de 4-Klein. Más aún, demuestre que estos no son isomorfos entre sí.

   Demostración:

   Sea G un grupo de orden 4. Por el teorema de Lagrange, los órdenes de los elementos de G deben dividir el orden del grupo, es decir, 4. Esto implica que los elementos de G pueden tener órdenes 1, 2 o 4.

   Denotemos e como el elemento identidad del grupo G.

   (a) **Si existe un elemento de orden 4:**

   Supongamos que G tiene un elemento g tal que $|g| = 4$. Entonces, los elementos de G son:

   $$G = \{e, g, g^2, g^3\}.$$

   La estructura de G en este caso coincide con $\mathbb{Z}_4$, el grupo cíclico de 4 elementos. Por lo tanto, $G \cong \mathbb{Z}_4$.

   (b) **Si no existe un elemento de orden 4:**

   En este caso, todos los elementos no identidad tienen orden 2. Es decir, G contiene el elemento identidad e y tres elementos a, b, c tales que $a^2 = b^2 = c^2 = e$ y $ab = c$, $bc = a$, $ca = b$. Esto es precisamente la estructura del grupo de Klein $V = \{e, a, b, c\}$, donde la operación entre dos elementos distintos no identidad produce el tercer elemento no identidad. Por lo tanto, $G \cong V$.

   Así, cualquier grupo de orden 4 es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o V.

Demostración: No isomorfismo entre $\mathbb{Z}_4$ y V

Para mostrar que $\mathbb{Z}_4$ y V no son isomorfos, observamos sus estructuras:

- En $\mathbb{Z}_4$, existe un único elemento de orden 4 (el generador del grupo), mientras que V no tiene ningún elemento de orden 4; todos los elementos no triviales tienen orden 2.

Esta diferencia en la distribución de los órdenes de los elementos implica que no puede existir un isomorfismo entre $\mathbb{Z}_4$ y V.

2. Sea G un subgrupo de S_n. Si $G \cap A_n = \{1\}$, demuestre que $|G| \leq 2$.

   Dem:

   La hipótesis nos dice que $G \cap A_n = 1$. Esta afirmación implica que no existe ninguna permutación distinta a la identidad, o que si se toma un elemento de G, solo puede ser impar, porque en caso contrario no se cumple esta condición inicial.

   Supongamos $|G| > 2$. Así, debe contener al menos dos elementos distintos g_1 y g_2, dos permutaciones impares (ya que la intersección entre G y A_n es la identidad, por lo que permutaciones pares quedan fuera). Si operamos estos elementos necesariamente debe dar una permutación par, ya que sus paridades se suman, y la suma de dos impares entrega par. Pero esto es una contradicción ya que $g_1 g_2 \neq e$ y no existen más permutaciones pares más que la identidad en esta intersección.

   OBS: En caso de que g_1, g_2 sean inverso del otro la conclusión sigue siendo válida, ya que no cumple con generalidad decir que son el inverso del otro. Se toman dos permutaciones cualquiera.

3. Encuentre las raíces cuartas de 7.

   Para ello utilizamos el teorema de De Moivre, que expresa equivalencia de los números complejos con trigonometría. Se tiene entonces su ecuación:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{[r(\cos x + i \operatorname{sen} x)]} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right)\right]$$

   Así, aplicaremos para cada caso con $n = 4$ y $k = 0, ..., n-1$, Así, se tiene si:

$$k = 0 \implies \sqrt[4]{7}\left(\cos\left(\frac{0+2\pi\cdot 0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2\pi\cdot 0}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt[4]{7}(\cos(0) + i\sin(0)) = \sqrt[4]{7}.$$

$$k = 1 \implies \sqrt[4]{7}\left(\cos\left(\frac{0+2\pi\cdot 1}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2\pi\cdot 1}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt[4]{7}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = \sqrt[4]{7}i.$$

$$k = 2 \implies \sqrt[4]{7}\left(\cos\left(\frac{0+2\pi\cdot 2}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2\pi\cdot 2}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt[4]{7}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -\sqrt[4]{7}.$$

$$k = 3 \implies \sqrt[4]{7}\left(\cos\left(\frac{0+2\pi\cdot 3}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2\pi\cdot 3}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt[4]{7}(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -\sqrt[4]{7}i.$$

   Revisa aquí la visualización de raíces complejas!

4. Calcule la raíz cuarta de $z = 4 + 4\sqrt{3}i$.

   Calculemos su módulo:

$$\sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 16 * 3} = \sqrt{64} = 8.$$

Calculemos su ángulo:

$$x = \arctan\frac{4\sqrt{3}}{4} = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

Calculemos sus raíces, con $n = 4, k = 0, ..., n-1$ y $x = \frac{\pi}{3}$

$$k = 0 \implies \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$k = 1 \implies \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 1}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 1}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$k = 2 \implies \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 2}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 2}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$$
$$= -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$k = 3 \implies \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 3}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 3}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$$
$$= -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2}\right)$$

Puedes corroborar tus resultados aquí.

5. Bonus: Probar $e^{ix} = cos(x) + isen(x)$.