

Teorema 6.1: Modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial.

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$, $y' = ky$ para alguna constante k , entonces

$$y = C e^{kt}$$

con C el valor inicial de y , k constante de proporcionalidad. El crecimiento exponencial se produce cuando $k > 0$, y el decrecimiento cuando $k < 0$.

Ejercicio 1: Desintegración radiactiva.

Suponga que 10 gr. del isótopo Pu-239 se liberaron en un accidente nuclear.

¿Cuánto tiempo tomará a los 10 gr. disminuir a 5 gr, si su vida media (que disminuyen a la mitad la muestra) es de 24100 años?

Considere que y representa la masa (en gramos) del plutonio. Ya que la tasa de desintegración es proporcional a y , se sabe que

$$y = C e^{kt}$$

con t el tiempo en años. Se sabe que en $y = 10$, $t = 0$.

Así,

$$10 = C e^{k \cdot 0} = C e^0 \Rightarrow C = 10.$$

Luego, ya que su vida media $t = 24100$ entonces $y = 5$. Se escribe:

$$5 = 10 e^{k \cdot 24100} \quad / \cdot \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{2} = e^{24100 \cdot k} \quad / \ln$$

$$\frac{1}{24100} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = k$$

$$k \approx -0,000028761.$$

Así, el modelo es:

$$y = 10 e^{-0,000028761 t}.$$

Despejando el tiempo para $y = 1$,

$$1 = 10 e^{-0,000028761t}.$$

$$\frac{1}{-0,000028761} \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) = t.$$

$$t \approx 80\,059 \text{ años.}$$

Ejercicio 2:

Resuelva los siguientes EDOs:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{5x}{y}$$

$$\Rightarrow y \frac{dy}{dx} = 5x$$

$$\Rightarrow y \, dy = 5x \, dx \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int y \, dy = \int 5x \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{5x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow y^2 = 5x^2 + C$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{5x^2 + C}$$

$$b) \quad \frac{dy}{dx} = x(1+y)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y} dy = x dx \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+y} dy = \int x dx$$

$$\Rightarrow \ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + c.$$

$$\Rightarrow e^{\ln(1+y)} = e^{\left(\frac{x^2}{2} + c\right)} \quad / e^c = C_1.$$

$$\Rightarrow 1+y = C_1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Suponer que una población de moscas incrementa conforme la ley de crecimiento exponencial.

Había 100 moscas antes del 2^{do} día y 300 después del 4^{to} día. ¿Cuántas moscas, aproximadamente, había en la población original?

Sea

$$y = Ce^{kt} \quad \text{con } t = \text{tiempo en días.}$$

$$t=2 \quad \text{entonces } y = 100$$

$$t=4 \quad \text{"} \quad y = 300.$$

lo que se puede escribir

$$100 = Ce^{2k} \quad (1) \quad \text{y} \quad 300 = Ce^{4k} \quad (2)$$

despejamos C de (1)

$$C = 100 e^{-2k}$$

y reemplazamos en (2) para obtener k .

$$300 = 100 e^{-2k} \cdot e^{4k}$$

$$\frac{300}{100} = e^{2k}$$

$$3 = e^{2k}$$

$$\ln(3) = 2k$$

$$\frac{1}{2} \ln(3) = k$$

$$0,5493 \approx k$$

así el modelo es:

$$y = C e^{0,5493t}$$

Para encontrar C se aplica $t=2$ $y=100$.

$$100 = C e^{0,5493 \cdot 2}$$

$$C = 100 e^{-1,0986}$$

$$C \approx 33.$$

el modelo es

$$y = 33 e^{0,5493t}$$

Para conocer la población inicial, decimos $t=0$

$$y = 33 e^{0,5493 \cdot 0}$$

$$y = 33$$

la población correspondía a 33 moscas.