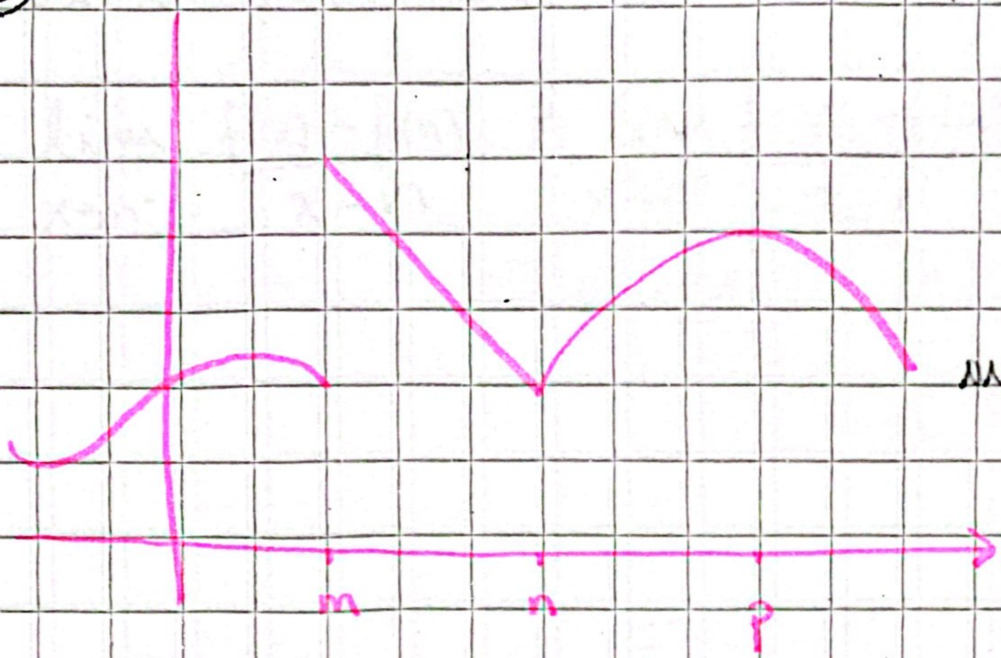
②



La función es derivable en todos los puntos, menos en m y n. Ya que, la función es continúa. En p notamos que:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x)$$

así que en p ~~existe límite~~ es continúa, así que es derivable.

Ahora, notamos que en m la función no es derivable porque

$$\lim_{x \to m^-} f(x) \neq \lim_{x \to m^+} f(x).$$

con límites laterales la función no es continúa, por ende, no es derivable.

En el punto n, se puede apreciar una recta con punta aun si bien es continúa pero no es derivable. Además

además, las derivadas son distintas.

$$\lim_{x \to n^-} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} \neq \lim_{x \to n^+} \frac{f(x) - f(n)}{x - n}.$$

⑧ tenemos la función auxiliar

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$h(x) = f(x) - g(x)$

h es una función compuesta por funciones continúas y derivables, por tanto, h también lo es.

$h'(x) = f'(x) - g'(x)$

Por enunciado $f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
$h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

lo q' implica que h es estricta/. creciente
Nótese que
$h(a) = f(a) - g(a) = 0$.

Dado que h es estricta/. creciente, entonces:
$x > a$, entonces:
$h(x) > h(a) \Rightarrow h(x) > 0$
$f(x) - g(x) > 0$
$f(x) > g(x)$.

Si $x < a$
$h(x) < h(a) \Rightarrow h(x) < 0$
$f(x) - g(x) < 0$
$f(x) < g(x)$ ∎

PEMMF.
Cálculo I
Rocío Acevedo

---

1 Ayudantía 9

1. Calcule por definición la derivada de $f(x) = \sqrt{x+3}$

   Sea la función $f(x) = \sqrt{x+3}$, para calcular su derivada por definición usamos el siguiente límite:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

   sustituyendo $f(x) = \sqrt{x+3}$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)+3} - \sqrt{x+3}}{h}.$$

   Amplificamos por $\sqrt{x+h+3} - \sqrt{x+3}$ para eliminar las raíces del numerador:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+3} - \sqrt{x+3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}}.$$

   Aplicando suma por su diferencia:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+3})^2 - (\sqrt{x+3})^2}{h\left(\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}\right)}.$$

   Resolviendo los cuadrados del numerador:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+3) - (x+3)}{h\left(\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}\right)},$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}\right)}.$$

   Simplificamos h:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}}.$$

Calculamos el límite por sustitución directa, $h \to 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

Por lo tanto, la derivada de $\sqrt{x+3}$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

2. Calcular por regla de la cadena la derivada de la función $f(x) = \sin\left(\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^3}{\sin(x)}\right)}\right)$.

   Definimos las funciones auxiliares $h(x) = \frac{x^3}{\sin(x)}$ y $g(x) = \frac{x^3}{\sin(h(x))}$, de tal forma que: $f(x) = \sin(g(x))$.

   Luego,

$$f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x).$$

   Calculamos $g'(x)$ con la derivada del consciente,

$$g'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^3) \cdot \sin(h(x)) - x^3 \cdot \frac{d}{dx}(\sin(h(x)))}{\sin^2(h(x))}.$$

   Calculamos las derivadas de x^3 y $\sin(h(x))$:

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2,$$

   y para $\sin(h(x))$:

$$\frac{d}{dx}(\sin(h(x))) = \cos(h(x)) \cdot h'(x).$$

   Calculamos $h'(x)$ con la derivada del consciente,

$$h'(x) = \frac{3x^2 \cdot \sin(x) - x^3 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

   Remplazamos las derivadas de x^3 y $\sin(h(x))$ en $g'(x)$,

$$g'(x) = \frac{3x^2 \cdot \sin(h(x)) - x^3 \cdot \cos(h(x)) \cdot h'(x)}{\sin^2(h(x))}.$$

Remplazamos $h(x)$ y $h'(x)$ en $g'(x)$,

$$g'(x) = \frac{3x^2 \cdot \sin(\frac{x^3}{\sin(x)}) - x^3 \cdot \cos(\frac{x^3}{\sin(x)}) \cdot \frac{3x^2 \cdot \sin(x) - x^3 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}}{\sin^2(\frac{x^3}{\sin(x)})}.$$

Finalmente, remplazamos $g(x)$ y $g'(x)$ en $f'(x)$,

$$f'(x) =$$

$$\cos\left(\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^3}{\sin(x)}\right)}\right) \cdot \frac{3x^2 \cdot \sin(\frac{x^3}{\sin(x)}) - x^3 \cdot \cos(\frac{x^3}{\sin(x)}) \cdot (\frac{3x^2 \cdot \sin(x) - x^3 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)})}{\sin^2(\frac{x^3}{\sin(x)})}.$$