

1) Dibuje el gráfico de la siguiente función:

$$f: \mathbb{R} - \{-3, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

Paso 1: Revisar sus intersecciones:

Eje x :

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} = 0$$

No posee intersección ya que $x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Eje y :

$$f(0) = \frac{0^2 + 1}{0^2 - 9} = -\frac{1}{9}$$

Intercepta en $(0, -\frac{1}{9})$

Paso 2: Encontrar el punto crítico y si es mínimo o máximo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 9) - (x^2 + 1)(x^2 - 9)'}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{2x((x^2 - 9) - (x^2 + 1))}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-20x}{(x^2 - 9)^2} \end{aligned}$$

Ahí, para que $f'(x) = 0$ entonces $-20x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Por tanto el punto crítico es 0.

Analizamos el valor de la derivada, considerando que su denominador siempre es positivo:

En $]-\infty, 0[$, $x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

En $]0, \infty[$, $x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.

Entonces $x = 0$ es un máximo relativo.

Paso 3: segunda derivada.

$$\text{Si } f'(x) = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}, \text{ calculamos } f''(x):$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-20x)'(x^2-9)^2 - (-20x)((x^2-9)^2)'}{(x^2-9)^4} \\ &= \frac{(-20)(x^2-9)^2 - ((-20x) \cdot 2 \cdot 2x \cdot (x^2-9))}{(x^2-9)^4} \\ &= \frac{(x^2-9)(-20(x^2-9) - 2 \cdot 2x \cdot -20x)}{(x^2-9)^4} \\ &= \frac{-20x^2 + 180 + 80x^2}{(x^2-9)^3} \\ &= \frac{60(x^2+3)}{(x^2-9)^3} \end{aligned}$$

Analizamos solo el denominador, ya que el numerador siempre es positivo.

$$f''(x) < 0 \text{ cuando } x^2-9 < 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3.$$

$$f''(x) > 0 \text{ cuando } x^2-9 > 0 \Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow x > 3 \vee x < -3.$$

Entonces es cóncava hacia abajo en $] -3, 3[$ y hacia arriba en $] -\infty, -3[$ y $] 3, +\infty[$.

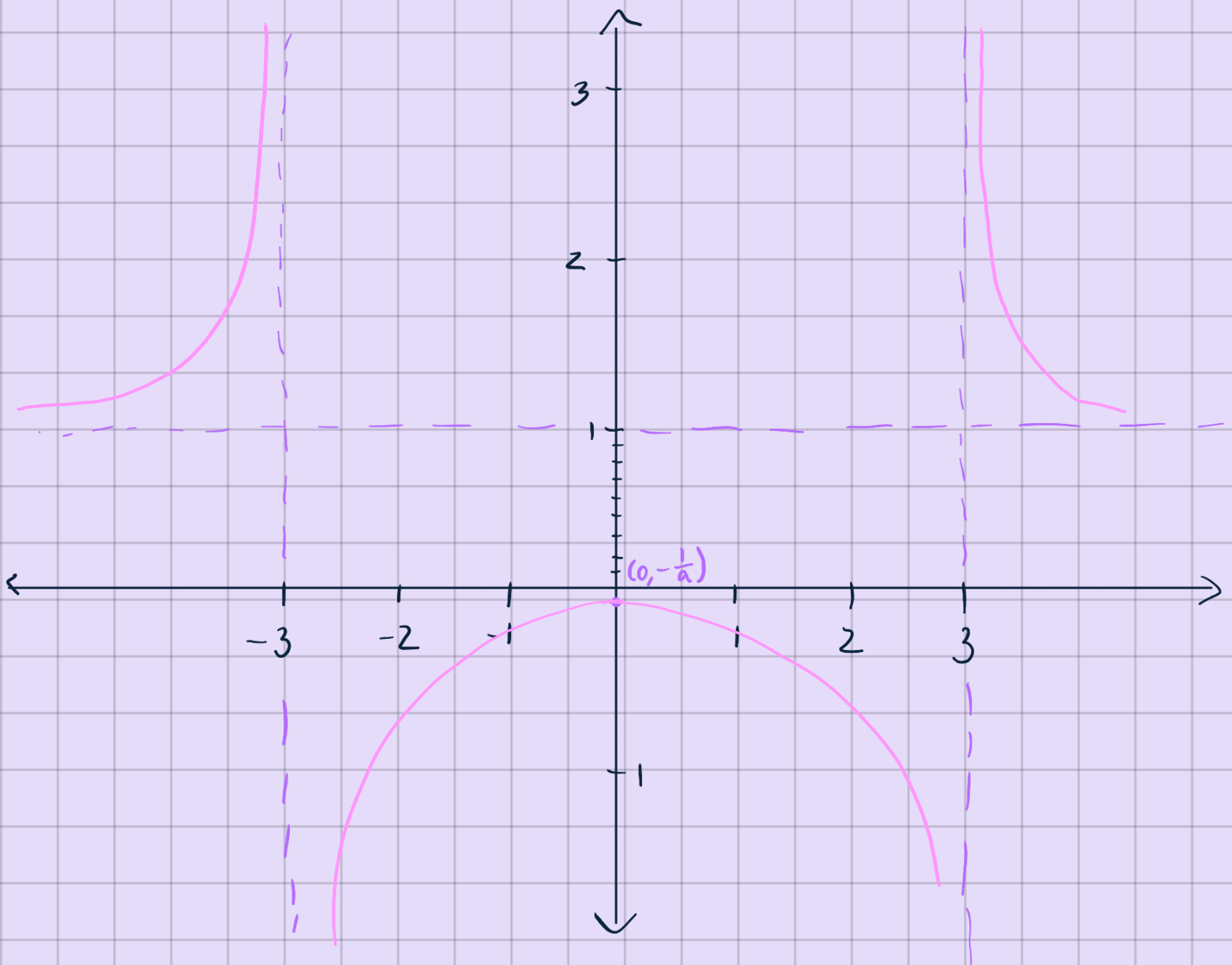
Paso 4: Asíntotas

Para las asíntotas horizontales calculamos su límite al infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2}^1 + \frac{1}{x^2}}{\cancel{x^2}^1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Para su asíntota vertical, tenemos los puntos de indeterminación que son $x = \pm 3$.

Dibujemos la función:



① Grafique

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{4 - x^2}$$

① determinemos su dominio

$$4 - x^2 \neq 0$$

$$(x+2)(x-2) \neq 0$$

$$x \neq 2 \text{ y } x \neq -2$$

$$\text{dom} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

esto indica que hay dos
asíntotas verticales.

② intersecciones con los ejes

eje X: no hay $x^2 + 4 \neq 0$ nunca sea 0.

$$\text{eje } y: \frac{0+4}{4-0} = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow (0, 1).$$

③ determinar si hay mínimo o máximo relativos.

Pts críticos: $f'(c) = 0$ o f no derivable.

overtone - sabemos que f no es derivable -2 y 2 .

buscamos $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(4-x^2) - (x^2+4)(-2x)}{(4-x^2)^2} \\ &= \frac{8x - 2x^3 - (-2x^3 - 8x)}{(4-x^2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{8x - 2x^3 + 2x^3 + 8x}{(4-x^2)^2}$$

$$= \frac{16x}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{16x}{(4-x^2)^2} = 0$$

$$x = 0$$

puntos críticos: $-2, 0$ y 2 .

analizamos

	$-\infty$	-2	0	2	
$f'(x)$	< 0	< 0	> 0	> 0	

así

$[-\infty, 0]$ decreciente

$[0, +\infty)$ creciente

Entonces $x = 0$ es un mínimo relativo.

④ Estudiamos concavidad.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{16(4-x^2)^2 - 16x(2(4-x^2)(-2x))}{(4-x^2)^4} \\
 &= \frac{16(x^4 - 8x^2 + 16) - 16x(-16x + 4x^3)}{(4-x^2)^4} \\
 &= \frac{16x^4 - 128x^2 + 256 + 256x^2 - 64x^4}{(4-x^2)^4} \\
 &= \frac{-48x^4 + 128x^2 + 256}{(4-x^2)^4} \\
 &= \frac{16(-3x^4 + 8x^2 + 16)}{(4-x^2)^4} \\
 &= \frac{16(3x^2 + 4)(4-x^2)}{(4-x^2)^4} \\
 &= \frac{16(3x^2 + 4)}{(4-x^2)^3}
 \end{aligned}$$

Buscamos $f''(x) = 0$ $16(3x^2 + 4) = 0 \rightarrow$ esto no ocurre.

ahora vemos donde $f''(x)$ no existe. $(4-x^2)^3 = 0$

$$4 - x^2 = 0$$

$$(2-x)(2+x) = 0$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$f'' \quad \begin{matrix} -\infty & -2 & 2 & \infty \\ < 0 & > 0 & < 0 \end{matrix}$$

$(-\infty, -2)$ cóncava hacia abajo

$(-2, 2)$ " " cóncava hacia arriba

$(2, \infty)$ " " cóncava hacia abajo

⑤ Asíntotas
calculamos el límite para horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{4 - x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Q1. horizontal en $y = -1$

