Teorema (Regla de L'Hopital)

Suponga que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Sea $]a, b[\subset \mathbb{R}$ tal que $c \in]a, b[$.

Supongamos además que:

- f y g son derivables en $]a, c[$ y $]c, b[$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, c[$ e $y \in]c, b[$,

Entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Suponiendo que el límite de la derecha existe o es infinito.

Ejercicios:

1) $$\lim_{x \to 1} \frac{Ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(Ln(x))'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x},$$

Pero queda de nuevo la forma "$\frac{\infty}{\infty}$".

Aplicamos de nuevo L'Hopital.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x - \operatorname{sen}(x)}$

Aplicamos L'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - \cos(x)}{1 - \cos(x)}$$

Y entrega una forma "$\frac{0}{0}$"

Usamos L'Hopital de nuevo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - \cos(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sec(x)\tan(x)\sec(x) + \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2(x)\tan(x) + \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Realizamos trabajo algebraico

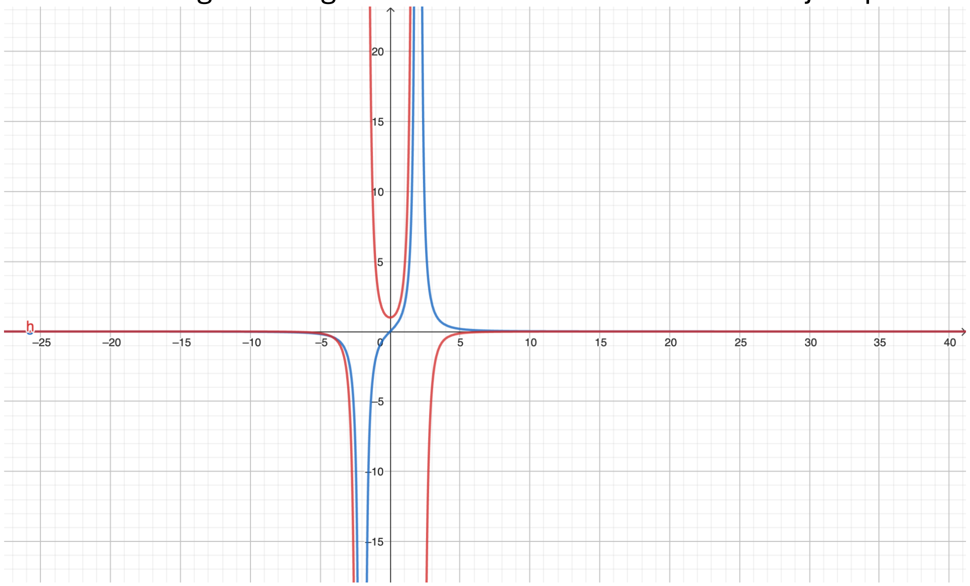
$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2(x)\tan(x) + \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\operatorname{sen}(x)}\left[2\sec^2(x)\frac{1}{\cos(x)} + 1\right]}{\cancel{\operatorname{sen}(x)}}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2\sec^3(x) + 1$$

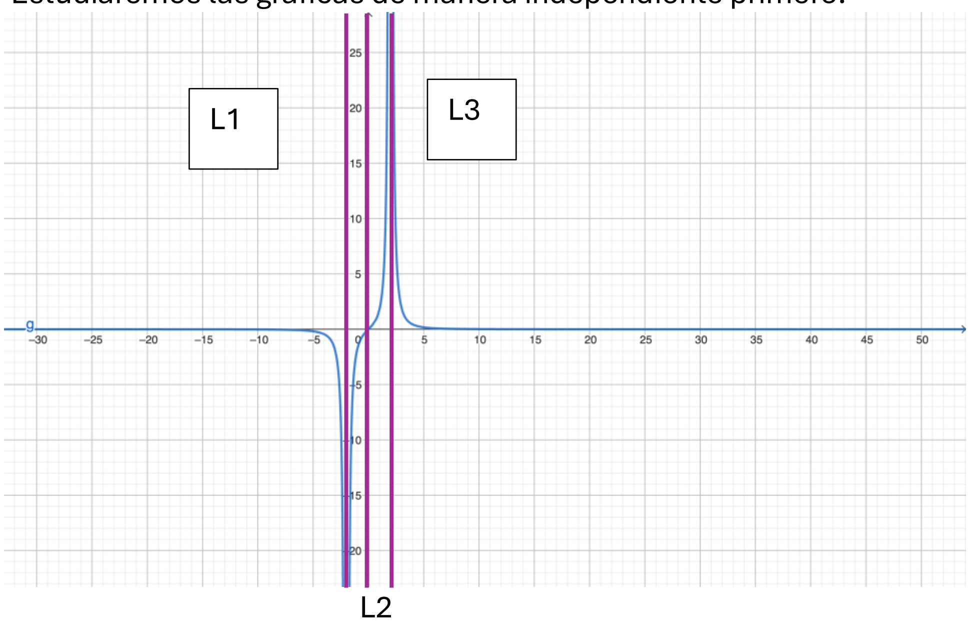
Evaluando,

$$\lim_{x \to 0} 2\sec^3(x) + 1 = 2 \cdot \sec^3(0) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

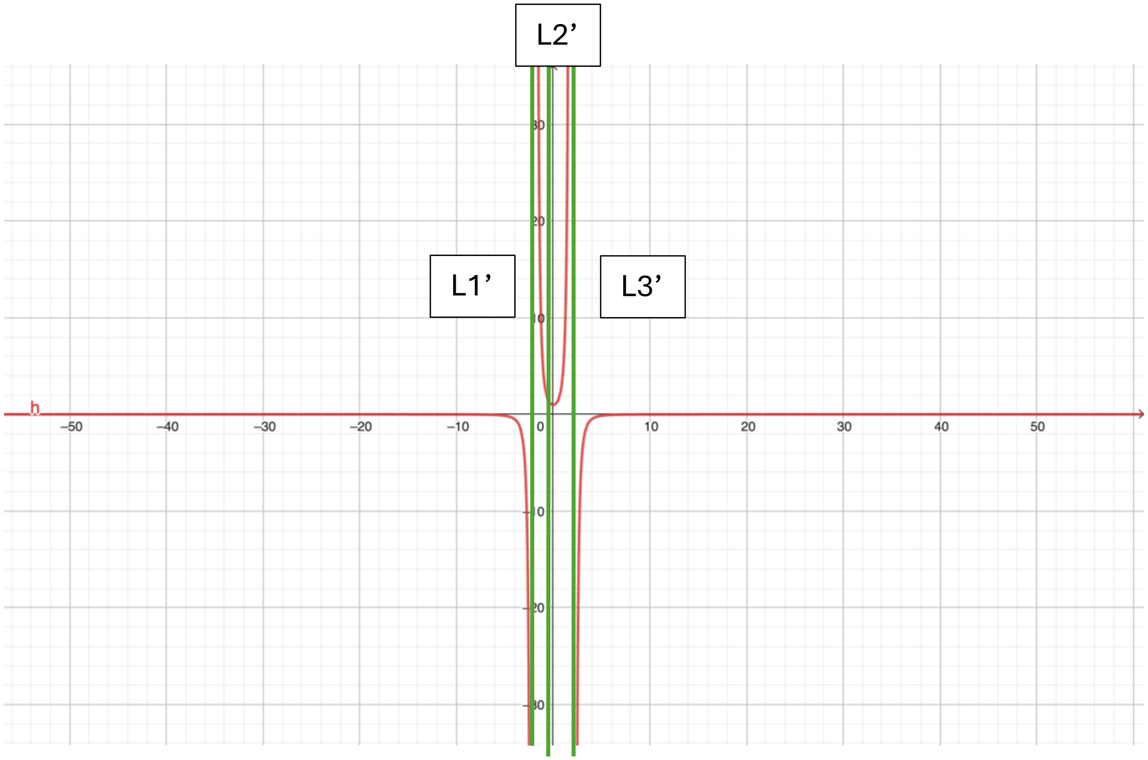
Observe las siguientes gráficas. Donde la curva de color rojo representa f'' y la curva de color azul es f'. Esboce la gráfica de f



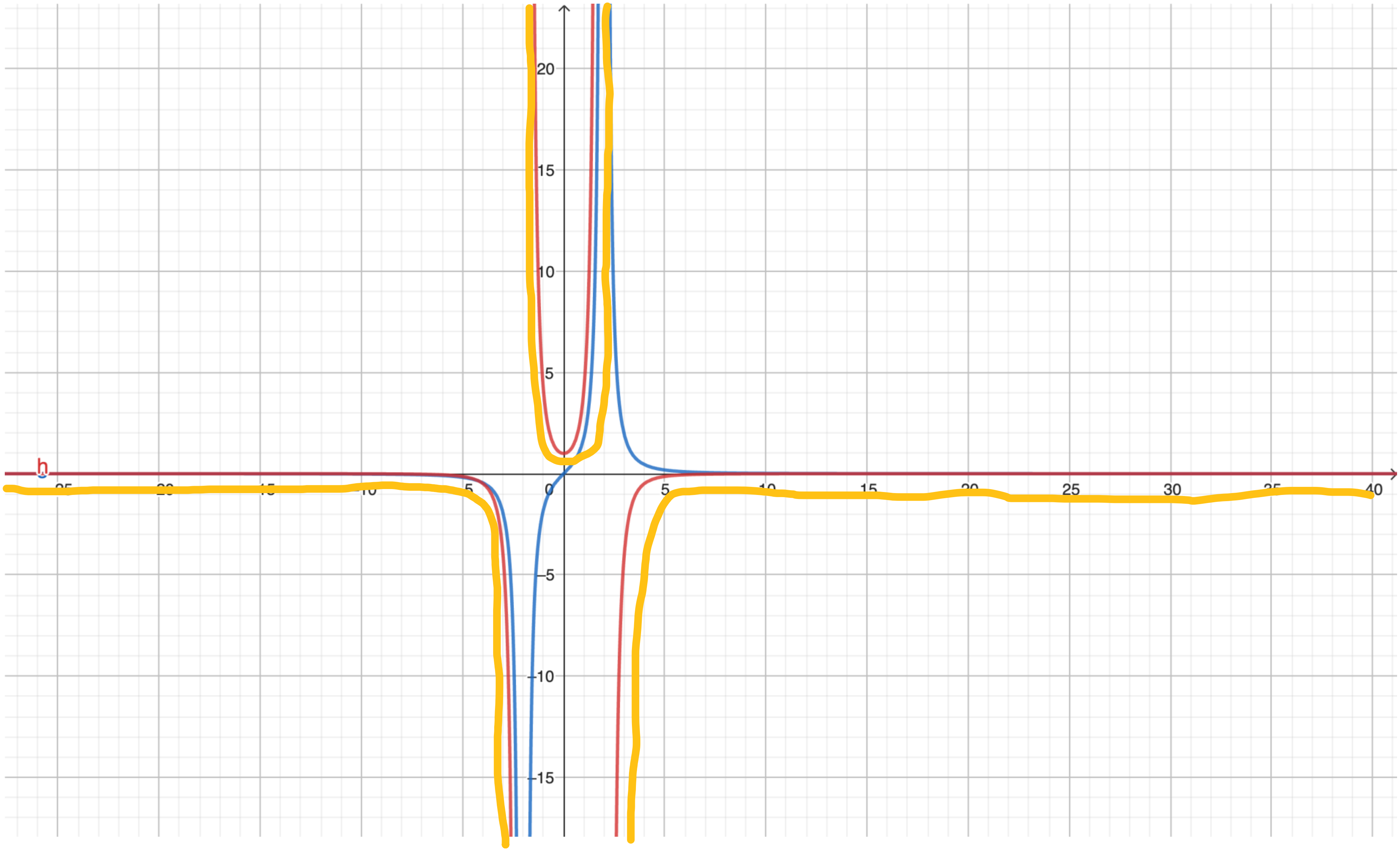
Estudiaremos las gráficas de manera independiente primero:



Notamos que antes de llegar a L1 la curva es negativa entonces f es decreciente, entre L1 y L2 es negativa f es decreciente y entre L2 y L3 es positiva así que f es creciente y después de L3 es positiva, por ende, f crece.



Notamos que antes de L1’ f’’ es negativa, entonces f es cóncava hacia abajo. Entre L1’ y L2’ la curva es f’’ es positiva entonces f es cóncava hacia arriba, entre L2’ y L3’ f’’ es positiva entonces f es cóncava hacia arriba y después de L3’ f’’ es negativa así que f es cóncava hacia abajo. Juntando ambas condiciones, esbozamos la curva de f



h
20
15
10
5
−5
−10
−15
0
5
10
15
20
25
30
40