

1) Demuestre la derivada de la multiplicación por definición.

Por demostrar:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

A partir de la definición de derivada se tiene:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

Las expresiones destacadas corresponden a la definición de derivada de f y g , respectivamente.

Así, queda:

$$(f(x)g(x))' = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

□

2) Demuestre la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

le tiene

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad / \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Encontrar la derivada de $\sin(x)$ usando la definición.

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

usamos la propiedad

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

y reemplazamos.

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)[\cos(h) - 1] + \cos(x)\sin(h)}{h}$$

separa el límite

$$= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)[\cos(h) - 1]}{h}}_{(1)} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h}}_{(2)}$$

Trabajo ①

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) [\cos(h) - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) [-(1 - \cos(h))]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) [1 - \cos(h)]}{h}$$

$$= -\sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h}$$

ahora $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h}$ es un límite conocido;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0.$$

Reemplazo.

$$= -\sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h}$$

$$= -\sin(x) \cdot 0$$

$$= 0$$

Trabajo 2:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h)}{h}$$

$$= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

Con $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$ conocido y su valor es 1,

reemplazo.

$$= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

$$= \cos(x)$$

$$\text{Junto: } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) [\cos(h) - 1]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h)}{h}$$

$$= 0 + \cos(x)$$

$$= \cos(x)$$

$$\therefore f'(x) = \cos(x)$$

Demostren que si f es derivable en a , entonces f es continua en $x = a$.

Para comprobar que f es continua $x = a$ hay que mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Para eso trabajamos con la derivabilidad de f en $x = a$.

Sabemos que estas expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \quad (\neq) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h.\end{aligned}$$

Por hipótesis, sabemos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe y llamaremos $f'(a)$.

así

$$\begin{aligned}&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Volvemos a la 1ª expresión (*) y podemos decir

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) \quad (2).$$

ahora, sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h)$$

Reemplazamos en (2).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad D.$$