AYUDANTÍA 3 - MEDIDA E INTEGRACIÓN

JUAN CARLOS POZO – DAVID URRUTIA

Ejercicio 1

Sea E un conjunto medible y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : E \to \mathbb{R}$. Demuestre que las funciones $f, g, h, y : E \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}\,, g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}\,, h(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ e } y(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$$

son medibles.

Antes de la demostración.

Para resolver este problema, sólo nos basta verificar que f sea medible. En efecto, se tiene la identidad

$$\sup A = -\inf(-A)$$

y considerando $A = \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene la medibilidad de $x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}$. Además, para cada $x \in E$, el límite inferior y superior de $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{B}}$, denotados por $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ y $\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)$, respectivamente, se definen como:

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\inf_{k\geq n}\{f_n(x)\}\right\} \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{k\geq n}\{f_n(x)\}\right\},$$

entonces, al considerar las sucesiones $x \mapsto g_n(x) := \sup\{f_k(x)\}_{k\geq n}$ y $x \mapsto h_n(x) := \inf\{f_k(x)\}_{k\geq n}$ junto con la medibilidad de f y g se logran recuperar funciones h e y, pero en forma de las funciones f y g descritas en el enunciado.

Demostración. Demostremos primero que f es medible: Sea $c \in \mathbb{R}$, demostraremos la siguiente identidad:

$$f^{-1}(]-\infty, c[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, c[).$$

En efecto, si $x \in f^{-1}(]-\infty, c[)$, se verifica que $f(x) < c$, pero como $f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}$, se va a demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(x) < c$ por contradicción: Al suponer que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $f_n(x) \geq c$. Sin embargo, el ínfimo $f(x)$ es la cota inferior más grande del conjunto $\{f_n(x) \colon n \in \mathbb{N}\}$, lo cual implica

$$c \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} = f(x) < c$$

lo cual es una contradicción. Entonces, se tiene la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(x) < c$, esto implica que $x \in f_{n_0}^{-1}(]-\infty, c[) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, c[)$, lo cual implica que $f(]-\infty, c[) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, c[)$ y obtenemos la primera contención.

Para demostrar la contención conversa, observemos que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, c[)$ equivale a la existencia de $k \in \mathbb{N}$ con $x \in f_k^{-1}(]-\infty, c[)$ lo cual implica que $f_k(x) < c$ y por lo tanto,

$$f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} \leq f_k(x) < c$$

y por mera transitividad, $f(x) < c$. Ésto implica que $x \in f^{-1}(]-\infty, c[)$, o equivalentemente, se demostró que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, c[) \subseteq f(]-\infty, c[)$. Con ésto, hemos demostrado que se cumple la triple contención

$$f(]-\infty, c[) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, c[) \subseteq f(]-\infty, c[),$$

y se tiene la igualdad deseada. Como cada f_n es medible, cada conjunto de la forma $f_n^{-1}(]-\infty, c[)$ es medible, y como la unión numerable de conjuntos medibles es medible, se tiene que

$$\{x \in E \colon f(x) < c\} = f(]-\infty, c[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, c[)$$

es medible. Lo cual implica que $x \mapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x)\}$ es medible. $\square$

EJERCICIO 2

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$. La función **Característica** o **indicatríz de** A corresponde a la función $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si A, B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, demuestre que

(i) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$.
(ii) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.
(iii) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

COMENTARIO IMPORTANTE!!!

Si bien este tipo de funciones se ve inocente y quizás puedan parecer una función "Inútil", este último adjetivo está muy lejos de la realidad, pues, las funciones características cobrarán un rol importantísimo en el curso cuando comencemos a estudiar el concepto de *integral de una función con respecto a la medida de Lebesgue*. Este último concepto se verá en un par de semanas más y la función característica tiene mucho que ver con este concepto.

Demostración. Partamos probando (i). Tenemos que probar que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Entonces, supongamos que $x \in \mathbb{R}$, hay cuatro posibilidades

(i) $x \in A$ y $x \in B$,
(ii) $x \in A$ pero $x \notin B$,
(iii) $x \notin A$ y $x \in B$,
(iv) $x \notin A$ y $x \notin B$.

Si $x \in A$ y $x \in B$, se tiene que $x \in A \cap B$, entonces,

$$\chi_A(x) = 1, \quad \chi_B(x) = 1 \quad \text{y} \quad \chi_{A\cap B}(x) = 1,$$

entonces,

$$\chi_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \cdot 1 = \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Si $x \in A$ pero $x \notin B$, se tiene que $x \notin A \cap B$, entonces,

$$\chi_A(x) = 1, \quad \chi_B(x) = 0 \quad \text{y} \quad \chi_{A\cap B}(x) = 0,$$

entonces,

$$\chi_{A\cap B}(x) = 0 = 1 \cdot 0 = \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Si $x \notin A$ pero $x \in B$, se tiene que $x \notin A \cap B$, entonces,

$$\chi_A(x) = 0, \quad \chi_B(x) = 1 \quad \text{y} \quad \chi_{A\cap B}(x) = 0,$$

entonces,

$$\chi_{A\cap B}(x) = 0 = 0 \cdot 1 = \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Por último, si $x \notin A$ y $x \notin B$, se tiene que $x \notin A \cap B$, entonces,

$$\chi_A(x) = 0, \quad \chi_B(x) = 0 \quad \text{y} \quad \chi_{A\cap B}(x) = 0,$$

entonces,

$$\chi_{A\cap B}(x) = 0 = 0 \cdot 0 = \chi_A(x)\chi_B(x).$$

entonces, demostramos que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$$

lo que es equivalente a $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$.

Para demostrar (ii), fijemonos que tendremos 3 casos posibles,

(i) $x \in A$ y $x \in B$,
(ii) $x \in A$ pero $x \notin B$,
(iii) $x \notin A$ y $x \in B$,
(iv) $x \notin A$ y $x \notin B$.

Para el primer caso, la hipótesis $x \in A$ y $x \in B$ implica que $x \in A \cup B$ y $x \in A \cap B$, de modo que

$$\chi_{A\cup B}(x) = 1, \chi_A = 1, \chi_B(x) = 1 \quad \text{y } \chi_{A\cap B} = 1$$

por ende,

$$\chi_{A\cup B}(x) = 1 = 2 - 1 = 1 + 1 - 1 = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x).$$

Si $x \in A$ y $x \notin B$, entonces, $x \in A \cup B$ pero $x \notin A \cap B$, lo cual implica

$$\chi_{A\cup B}(x) = 1, \chi_A = 1, \chi_B(x) = 0 \quad \text{y } \chi_{A\cap B} = 0$$

por ende,

$$\chi_{A\cup B}(x) = 1 = 1 + 0 - 0 = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x).$$

Para el tercer caso, tenemos que $x \notin A$ y $x \in B$, entonces, $x \in A \cup B$ pero $x \notin A \cap B$, lo cual implica

$$\chi_{A\cup B}(x) = 1, \chi_A = 0, \chi_B(x) = 1 \quad \text{y } \chi_{A\cap B} = 0$$

por ende,

$$\chi_{A\cup B}(x) = 1 = 0 + 1 - 0 = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x).$$

Por último, si Si $x \notin A$ y $x \notin B$, entonces, $x \notin A \cup B$ y $x \notin A \cap B$, lo cual implica

$$\chi_{A\cup B}(x) = 0, \chi_A = 0, \chi_B(x) = 0 \quad \text{y } \chi_{A\cap B} = 0$$

por ende,

$$\chi_{A\cup B}(x) = 0 = 0 + 0 - 0 = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x).$$

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$$

lo que equivale a $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

Por último, para probar (iii), se tiene que si $x \in \mathbb{R}$, entonces, $x \in A$ o $x \in A$, entonces, si $x \in A$, se tiene que $x \notin A^c$, luego

$$\chi_{A^c} = 0 = 1 - 1 = 1 - \chi_A(x).$$

Por otro lado, si $x \in A^c$, se tiene que $x \notin A$, por ende

$$\chi_{A^c}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \chi_A(x).$$

Luego, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Lo cual equivale a $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$. □

Ejercicio 3

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que χ_E es una función medible si y sólo si E es medible.

Previo a la demostración:

Recordemos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es medible si ocurre al menos una de las siguientes situaciones:

a) Para cada $r \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in A \colon f(x) < r\} = f^{-1}(]-\infty, r[)$$

es medible.

b) Para cada $r \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in A \colon f(x) \leq r\} = f^{-1}(]-\infty, r])$$

es medible.

c) Para cada $r \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in A \colon f(x) > r\} = f^{-1}(]r, +\infty[)$$

es medible.

d) Para cada $r \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in A \colon f(x) \geq r\} = f^{-1}([r, +\infty[)$$

es medible.

Por otro lado, recordemos que la función característica $\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

Entonces, usaremos fuertemente estas definiciones en la resolución de este ejercicio.

Demostración. $(\Rightarrow)$**.** Supongamos que $\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces,

$$\chi_E^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) \geq 1\}$$

y como χ_E es medible, $\chi_E^{-1}(\{1\})$ es medible, pero notemos que $x \in \chi_E^{-1}(\{1\})$ si y sólo si $\chi_E(x) = 1$ y esto es equivalente a que $x \in E$, entonces,

$$\chi_E^{-1}(\{1\}) = E$$

y dado que $\chi_E^{-1}(\{1\})$ es medible, E también lo es.

$(\Leftarrow)$.

Supongamos que E es medible. Probemos que χ_E es una función medible. Entonces, sea $r \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos tres casos:

Caso 1: $r \leq 0$
Caso 2: $0 < r < 1$
Caso 3: $r > 1$.

En el caso 1, se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\} = \emptyset,$$

en efecto, si no fuese así, sea $x_0 \in \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\}$, entonces,

$$\chi_E(x) < r \leq 0,$$

entonces, $\chi_E(x) < 0$, lo cual no es posible, pues χ_E sólo toma valores en 0 y en 1. Eso demuestra que $\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\} = \emptyset$. Entonces, $\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\}$ es medible.

Ahora, si consideramos el segundo caso, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\} = E^c,$$

en efecto, si $x \in E^c$, entonces, $\chi_E(x) < r$, de modo que $x \in \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\}$ y se tiene la contención $E^c \subseteq \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\}$.

Si $x \in \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\}$, entonces, $\chi_E(x) < r$, pero como $r > 0$, el único valor que puede tomar $\chi_E(x)$ es cero (de no ser así, el otro valor que puede tomar es 1, pero $\chi_E(x) = 1 > r$ lo que es una contradicción). entonces, $\chi_E(x) = 0$ y por ende, $x \in E^c$. Entonces $\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\} \subseteq E^c$ y por lo tanto

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\} = E^c.$$

Ahora, como E es medible, E^c también es medible, de modo que $\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\}$ también lo es.

Por último, si $r > 1$, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\} = \mathbb{R},$$

pues, si $x \in \mathbb{R}$, entonces, $x \in E$ o bien, $x \in E^c$, entonces, $\chi_E(x) = 1 < r$ o bien, $\chi_E(x) = 0 < 1 < r$, lo cual implica que en cualquier caso, $\chi_E(x) < r$ y por ende, $x \in \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\}$. Esto concluye que $\mathbb{R} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\} \subseteq \mathbb{R}$ y por ende, $\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\} = \mathbb{R}$ lo que es medible.

Entonces, para cada $r \in \mathbb{R}$, se tiene que el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \chi_E(x) < r\}$$

es medible y por tanto, χ_E es una función medible cuando E es medible.

Esto concluye la demostración. □

Ejercicio 4

Demuestre que una función medible $f : E \to \mathbb{R}$ es una función simple si y sólo si f toma un valor finito de valores, es decir, existen numeros reales $c_1, \ldots, c_n$ tales que $f(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$.

Proof. **(**$\Rightarrow$**).** Supongamos que $f : E \to \mathbb{R}$ es una función simple. Es decir, existen conjuntos $E_1, \ldots, E_n$ medibles tales que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

con $E_j \cap E_i = \emptyset$ y numeros reales $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

para cada $x \in E$.

Entonces, para cada $x \in E$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$f(x) = c_i,$$

lo que implica que $f(x) = c_i \in \{c_1, \ldots, c_n\}$, entonces, $\mathrm{Im}(f) = f(E) \subseteq \{c_1, \ldots, c_n\}$ y se tiene que $\mathrm{Im}(f)$ es un conjunto finito y por ende, f toma un valor finito de valores.

($\Leftarrow$). Sea $f : E \to \mathbb{R}$una función medible tal que f toma una cantidad finita de valores, esto es, $f(E) = \{c_1, \ldots, c_n\}$ con $c_i \in \mathbb{R}$. Si $n = 1$, entonces,

$$f(x) = c_1$$

Para todo $x \in E$ y por tanto,

$$f(x) = c_1 = c_1 \chi_E(x)$$

y por tanto, $f = c\chi_E$, lo que sería una función simple.

Si $n > 1$, podemos suponer que $c_i \neq c_j$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. De este modo, considere el conjunto

$$E_i := \{x \in E \colon f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\}) \quad \text{con } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Primero, notemos que cada E_i es medible, pues, corresponde a la intersección

$$f^{-1}(]-\infty, c_i]) \cap f^{-1}([c_i, +\infty[)$$

los cuales son ambos medibles por definición de f.

Note que para cada par $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, se tiene que $E_i \cap E_j = \emptyset$, en efecto, si no fuera así, existiría $x \in E_i \cap E_j$, entonces, por definición, se tiene que

$$c_i = f(x) = c_j$$

de modo que $c_i = c_j$ lo cual contradice que $c_i \neq c_j$.

Por otro lado, si $x \in E$, entonces, $f(x) = c_{i_0}$ para algún $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ y por tanto, $x \in E_{i_0}$.

Entonces, se demostrará que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \quad \text{para cada } x \in E.$$

en efecto, si $x \in E$, entonces, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in E_j$ y $x \notin E_i$ para todo $i \neq j$.

$$\chi_{E_j}(x) = 1 \quad \text{y } \chi_{E_i}(x) = 0$$

de modo que

$$f(x) = c_j = c_j \chi_{E_j}(x) = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \chi_{E_\ell}(x)$$

lo que concluye que f en realidad era una función simple.

Con ello, demostramos lo que se quería. □

Ejercicio 5

Sea $f : E \to [-\infty, +\infty]$ una función medible y finita c.t.p en E, es decir, si

$$E_0 = \{x \in E \colon |f(x)| < +\infty\},$$

entonces, $m(E \setminus E_0) = 0$.

Si $m(E) < +\infty$. Demuestre que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto F medible de E tal que f es acotada en E y $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

Antes de la demostración.

Recordemos un teorema que nos puede ser de utilidad:

Teorema 1 (Continuidad de la medida)**.** . *La medida de Lebesgue satisface las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles que verifican $A_n \subseteq A_{n+1}$ par todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

(ii) *Si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles tal que $m(B_1) < +\infty$ y $B_{n+1} \subseteq B_n$, entonces,*

$$\lim_{n\to+\infty} m(B_n) = m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

Este ejercicio se resuelve por medio de una aplicación de la continuidad de la Medida.

Demostración. Supongamos que $f : E \to \mathbb{R}$ (y de ahí, extendemos a $[-\infty, +\infty]$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos el conjunto
$$E_n = \{x \in E\colon -n \leq f(x)\} \cap \{x \in E\colon f(x) \leq n\}.$$

Como f es medible, los conjuntos
$$\{x \in E\colon -n \leq f(x)\} \text{ y } \{x \in E\colon f(x) \leq n\}$$
son medibles y por ende, E_n es medible al ser la intersección entre estos dos conjuntos.

Por otro lado, notemos que
$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$
En efecto, si $x \in E$, entonces, $|f(x)| \in \mathbb{R}$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq N$ por la propiedad arquimediana. Entonces,
$$|f(x)| \leq N \Rightarrow -N \leq f(x) \leq N,$$
entonces,
$$f(x) \in [-N, N] = [-N, +\infty) \cap (-\infty, N],$$
luego, $-N \leq f(x)$ y $f(x) \leq N$, lo que implica que $x \in E_N$. Dada la contención $E_N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, se tiene que
$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$
y por definición, cada $E_n \subseteq E$, lo cual implica
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq E$$
y esto implica
$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n,$$
Por otro lado, se tiene que
$$E_n \subseteq E_{n+1},$$
pues si $x \in E_n$, entonces,
$$-(n+1) < -n \leq f(x) \quad \text{y} \quad f(x) \leq n < n+1,$$
lo cual implica que $-(n+1) \leq f(x)$ y $f(x) \leq n+1$, y eso es lo mismo a que $x \in E_{n+1}$. Luego, se verifica la contención $E_n \subseteq E_{n+1}$.

Ahora, consideremos la familia $\{B_n\}$ definida por $B_n = E \setminus E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $E_n \subseteq E_{n+1}$, se tiene que
$$E_{n+1}^c \subseteq E_n^c$$
y por ende,
$$B_{n+1} = E \setminus E_{n+1} = E \cap E_{n+1}^c \subseteq E \cap E_n^c = E \setminus E_n = B_n.$$

Por otro lado, $B_1 = E \setminus E_1 \subseteq E$ y como E tiene medida finita, se tiene que $m(B_1) \subseteq m(E) < +\infty$ y por ende, $m(B_1) < +\infty$.

Entonces,
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus E_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E \cap E_n^c) = E \cap \left(\bigcap E_n^c\right) = E \cap E^c = \emptyset.$$
de modo que $m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = m(\emptyset) = 0$.

Luego, por el punto (ii) de la continuidad de la medida de Lebesgue, se tiene que
$$\lim_{n\to+\infty} m(B_n) = m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 0.$$

Entonces, si $\varepsilon > 0$, entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se tiene que $m(E \setminus E_n) = m(B_n) < \varepsilon$.

Entonces, consideremos $F = E_N$. Por un lado, se tiene que
$$m(E \setminus F) = m(E \setminus E_N) < \varepsilon.$$

Por otro lado, si $x \in F$, entonces, $x \in E_N$ y por ende,
$$-N \leq f(x) \quad \text{y} \quad f(x) \leq N,$$
lo que implica
$$-N \leq f(x) \leq N \Rightarrow |f(x)| \leq N,$$
entonces, para todo $x \in F$, se tiene que $|f(x)| \leq N$ lo que implica que f es acotado en F.

Entonces, hemos demostrado que dado $\varepsilon > 0$ existe F un subconjuto medible de E tal que f es acotado en F y $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

Ahora, teniendo en cuenta que $f : E \to [-\infty, +\infty]$ es medible y finita c.t.p en E. Se tiene que

$$E_0 = \{x \in E \colon |f(x)| < +\infty\},$$

verifica $m(E \setminus E_0) = 0$.

Por otro lado, el resoltado nos dice que dado $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq E_0$ medible tal que $m(E_0 \setminus F) < +\infty$ y f es acotado en F. Entonces,

$$\begin{aligned}
E \setminus F &= (E_0 \cup [E \setminus E_0]) \setminus F = (E_0 \cup [E \setminus E_0]) \cap F^c \\
&= (E_0 \cap F^c) \cup ([E \setminus E_0] \cap F^c) = (E_0 \cap F^c) \cup ([E \cap E_0^c] \cap F^c) \\
&= (E_0 \cap F^c) \cup (E \cap [E_0^c \cap F^c]) = (E_0 \cap F^c) \cup (E \cap [E_0 \cup F]^c) \\
&= (E_0 \cap F^c) \cup (E \cap E_0^c) \qquad\qquad \text{pues, } F \subseteq E_0 \\
&= (E_0 \setminus F) \cup (E \setminus E_0)
\end{aligned}$$

y además,

$$(E_0 \setminus F) \cap (E \setminus E_0) = (E_0 \cap F^c) \cap (E \cap E_0^c) = E_0 \cap E_0^c \cap F^c \cap E = \emptyset.$$

Por ende,

$$m(E \setminus F) = m((E_0 \setminus F) \cup (E \setminus E_0)) = m(E_0 \setminus F) + m(E \setminus E_0) = m(E_0 \setminus F) < \varepsilon,$$

En resumen, dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $F \subseteq E$ medible tal que $m(E \setminus F)$ y f es acotado en F. □

Ejercicio 6

Pruebe que la conclusión del Teorema de Egoroff puede fallar si se omite la hipótesis de que el dominio de f no tenga medida finita.

Teorema 2. *Asuma que E tiene medida finita. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en E que converge puntualmente a $f : E \to \mathbb{R}$ en E. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F \subseteq E$ para el cual*

$$f_n \to f \text{ uniformemente en } F \quad y \quad m(E \setminus F) < \varepsilon.$$

es decir, si queremos demostrar que al omitir la finitud de la medida de E, el teorema de Egoroff falla. Basta con verificar que existe E de medida infinita, una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$ tal que todo cerrado $F \subseteq E$ verifica que f_n no converge uniformemente a f o bien, que $m(E \setminus F) \geq \varepsilon$ (con que pase una de las dos, basta para verificar la afirmación).

Solución. Sea $E = [0, +\infty)$ y $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones donde para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n : E \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f_n(x) := \chi_{[n,n+1)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1) \\ 0 & x \notin [n, n+1), \end{cases}$$

demostraremos que $f_n \to 0$ en E puntualmente, pero que $\{f_n\}$ no converge uniformemente a 0.

Primero, para demostrar que $f_n \to f$ puntualmente, debemos probar que para todo $x \in [0, +\infty)$, se verifica el límite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0,$$

entonces, si $x = 0$, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x < n \Rightarrow x \notin [n, n+1) \quad \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces, $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por ende,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 = f(x).$$

Por otro lado, si $x \in (0, +\infty)$, la propiedad arquimediana dice que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x < N$, eso implica que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \colon x < n\}$ es no vacío, entonces, el principio del Buen Orden establece que tiene dicho conjunto posee un mínimo elemento. Sea $N_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \colon x < n\}$. Si $n \geq N_0$, se tiene que

$$x < N_0 \leq n,$$

de modo que $x \notin [n, n+1)$, lo cual implica que

$$|f_n(x)| = |\chi_{[n,n+1)}(x)| = |0| = 0 < \varepsilon.$$

Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces, $|f_n(x)| < \varepsilon$.

Entonces, para cada $x \in [0, +\infty)$ se tiene que $f_n(x) \to 0$ lo cual implica que $f_n \to f$ puntualmente en $[0, +\infty)$.

Por otro lado, si $\varepsilon > 0$ y suponemos que existe un cerrado $F \subseteq E$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en F y $m(E \setminus F) < \varepsilon$, entonces, como F es medible, se verifica que

$$m(E \setminus F) = m(E) - m(F) < \varepsilon,$$

Entonces, si F fuese acotado, entonces,

$$m(E \setminus F) = m(E) - m(F) = +\infty < \varepsilon$$

y se tendría una contradicción (pues, $0 < \varepsilon < +\infty$). Luego, F no es acotado. Eso implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in F$ tal que

$$x \geq n.$$

Entonces, si suponemos que $f_n \to f$ uniformemente en F, se tiene que para todo $r > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x)| < r$ para todo $x \in [0, +\infty)$ y $m(E \setminus F) < \varepsilon$, entonces, en particular, para $r = \frac{1}{2}$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y todo $x \in F$, en particular, si escogemos $x \in F$ tal que $x \geq N$, entonces, nuevamente la propiedad arquimediana nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, de modo que si escojemos N_0 tal que $N < N_0 \leq x < N_0 + 1$, entonces

$$f_{N_0}(x) = \chi_{[N_0, N_0+1)}(x) = 1 < \frac{1}{2}$$

lo cual es una contradicción. Entonces, f_n no puede converger uniformemente a 0 en F. □

Ejercicio 7

Demuestre que el Teorema de Egoroff se sigue verificando si $f_n \to f$ c.t.p en E y f es finita *c.t.p*, es decir, los conjuntos

$$E_0 := \{x \in E \colon -\infty < f(x) < +\infty\} \quad \text{y} \quad E_1 := \{x \in E \colon f_n(x) \to f(x)\}$$

tienen complemento de medida nula.

Demostración. Asumamos $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible verificando $m(E) < +\infty$ y que $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones de la forma $f_n : E \to \mathbb{R}$ convergente c.t.p a una función $f : E \to [-\infty, +\infty]$ verificando

$$m(E \setminus E_0) = m(E \setminus E_1) = 0.$$

Sea $\tilde{E} = E_0 \cap E_1$. Nótese que

$$\begin{aligned} E \setminus \tilde{E} &= E \setminus (E_0 \cap E_1) = E \cap (E_0 \cap E_1)^c \\ &= E \cap (E_0^c \cup E_1^c) = (E \cap E_0^c) \cup (E \cap E_1^c) \\ &= (E \setminus E_1) \cup (E \setminus E_0), \end{aligned}$$

por ende,

$$m(E \setminus \tilde{E}) = m((E \setminus E_1) \cup (E \setminus E_0)) \leq m(E \setminus E_1) + m(E \setminus E_0) = 0.$$

Como $\tilde{E} \subseteq E$ y $m(E) < +\infty$, se tiene que $m(\tilde{E}) < +\infty$.

Además,

$$\tilde{E} = E_0 \cap E_1 \subseteq E_1 = \{x \in E \colon f_n(x) \to f(x)\},$$

de modo que $f_n \to f$ puntualmente en $\tilde{E}$.

Entonces, el Teorema de Egoroff nos dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \subseteq \tilde{E}$ tal que

$$f_n \to f \text{ uniformemente en } F \text{ y } m(\tilde{E} \setminus F) < \varepsilon.$$

Luego, $F \subseteq \tilde{E} \subseteq E$, entonces, $F \subseteq E$ y además, $E = (E \setminus \tilde{E}) \cup \tilde{E}$, luego,

$$\begin{aligned} E \setminus F &= ((E \setminus \tilde{E}) \cup \tilde{E}) \setminus F = ((E \setminus \tilde{E}) \cup \tilde{E}) \cap F^c \\ &= [(E \setminus \tilde{E}) \cap F^c] \cup [\tilde{E} \cap F^c] = [(E \cap \tilde{E}^c) \cap F^c] \cup [\tilde{E} \cap F^c] \\ &= [E \cap (\tilde{E}^c \cap F^c)] \cup [\tilde{E} \cap F^c] = [E \cap (\tilde{E} \cup F)^c] \cup [\tilde{E} \cap F^c] \\ &= [E \cap \tilde{E}^c] \cup [\tilde{E} \cap F^c] = [E \setminus \tilde{E}] \cup [\tilde{E} \setminus F], \end{aligned}$$

luego,

$$m(E \setminus F) = m([E \setminus \tilde{E}] \cup [\tilde{E} \setminus F^c]) \leq m(E \setminus \tilde{E}) + m(\tilde{E} \setminus F) = m(\tilde{E} \setminus F) < \varepsilon.$$

Entonces, $f_n \to f$ uniformemente en F y $m(E \setminus F) < \varepsilon$. Lo cual concluye la demostración.

□

EJERCICIO 8

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible. Demuestre que el Teorema de Lusin sigue siendo cierto al considerar funciones del tipo $f : E \to [-\infty, +\infty]$ finitas c.t.p, es decir, para funciones $f : E \to [-\infty, +\infty]$ donde el conjunto

$$\{x \in E \colon f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad f(x) = -\infty\}$$

tiene medida nula.

Recordemos el Teorema de Lusin:

Teorema 3. *Sea E un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un conjunto cerrado F contenido en E tal que*

$$f = g \text{ en } F \text{ y } m(E \setminus F) < \varepsilon$$

Demostración. Sea $f : E \to [-\infty, +\infty]$ una función tal que f es finita c.t.p, es decir, el conjunto

$$E_0 = \{x \in E \colon -\infty < f(x) < +\infty\}.$$

tiene complemento de medida nula. Notemos que la restricción $f : E_0 \to [-\infty, +\infty]$ verifica que $f(E_0) \subseteq \mathbb{R}$ por la definición de E_0, entonces, recordemos que el Teorema de Lusin nos dice que dado $\varepsilon > 0$ existe una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un conjunto cerrado $F \subseteq E_0$ tal que

$$f = g \text{ en } F \text{ y } m(E_0 \setminus F) < \varepsilon,$$

Ahora, recordemos lo siguiente: Como $E_0 \subseteq E$, se verifica la igualdad

$$E = (E \setminus E_0) \cup E_0$$

el cual verifica $(E \setminus E_0) \cap E_0 = \emptyset$ y $m(E \setminus E_0) = 0$.

Además, $F \subseteq E_0 \subseteq E$ de modo que $F \subseteq E$ y

$$\begin{aligned} E \setminus F &= ((E \setminus E_0) \cup E_0) \setminus F = ((E \setminus E_0) \cup E_0) \cap F^c \\ &= ((E \setminus E_0) \cap F^c) \cup (E_0 \cap F^c) = ((E \setminus E_0) \cap F^c) \cup (E_0 \cap F^c) \\ &= ((E \cap E_0^c) \cap F^c) \cup (E_0 \cap F^c) = (E \cap (E_0^c \cap F^c)) \cup (E_0 \cap F^c) \\ &= (E \cap (E_0 \cup F)^c) \cup (E_0 \cap F^c) = (E \setminus (E_0 \cup F)) \cup (E_0 \cap F^c) \\ &= (E \setminus E_0) \cup (E_0 \setminus F) \end{aligned}$$

y esto último, pues, $F \subseteq E_0$. Por otro lado

$$(E \setminus E_0) \cap (E_0 \setminus F) = (E \cap E_0^c) \cap (E_0 \cap F^c) = \emptyset$$

de modo que se verifica

$$m(E \setminus F) = m((E \setminus E_0) \cup (E_0 \setminus F)) = m(E \setminus E_0) + m(E_0 \setminus F) = m(E_0 \setminus F) < \varepsilon,$$

y se obtiene lo que se quería.

□

Ejercicio 9

Exprese una función medible como la diferencia entre dos funciones medibles no negativas y deduzca el Teorema de aproximación simple general basado en el caso especial de funciones no negativas.

Antes de la Demostración:

Recordemos el Teorema de la Aproximación simple.

Teorema 4. *Sea $f : E \to [-\infty, +\infty]$ una función. f es una función medible si y sólo si existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tales que*

(a) $\varphi_n \to f$ *puntualmente en* E.

(b) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todo* $x \in E$ *se tiene*

$$|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|.$$

Si f es no negativa, podemos escojer $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente.

Demostración. $(\Rightarrow)$.

Recordemos que

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

donde $f^\pm : E \to [-\infty, +\infty]$ está definida por

$$f^\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\},$$

los cuales son medibles, pues, f lo es y la función constante 0 también. En efecto, si $x \in E$ tal que $f(x) < 0$, entonces, $-f(x) > 0$ y por ende,

$$f^+(x) = \max\{-f(x), 0\} = 0 \quad \text{y} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -f(x),$$

por ende,

$$f(x) = -(-f(x)) = -\max\{f(x), 0\} = f^-(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

En efecto, si $x \in E$ tal que $f(x) \geq 0$, entonces,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = f(x) \quad \text{y} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = 0,$$

por ende,

$$f(x) = f(x) = \max\{f(x), 0\} = f^+(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

y además,

$$0 \leq \max\{-f(x), 0\} = f^-(x) \quad \text{y} \quad 0 \leq \max\{f(x), 0\} = f^+(x),$$

Por ende, f^+ y f^- son funciones no negativas, de este modo, existen sucesiones $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tales que $\varphi_n \to f^+$ y $\psi_n \to f^-$ puntualmente con $|\varphi_n| \leq f^+$ y $|\psi_n| \leq f^-$.

Entonces, si $x \in E$ con $f(x) > 0$, se tiene que $f^-(x) = 0$ y por la desigualdad $|\psi_n| \leq f^- = 0$, Se tiene que $\psi_n(x) = 0$ para todo $x \in E$ con $f(x) > 0$.

Por otro lado, si $x \in E$ con $f(x) \leq 0$, se tiene que $f^+(x) = 0$ y por la desigualdad $|\varphi_n| \leq f^+ = 0$, Se tiene que $\varphi_n(x) = 0$ para todo $x \in E$ con $f(x) > 0$.

Definamos la sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones definida por $\phi_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x)$ para todo $x \in E$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión es una sucesión de funciones simples por ser resta de funciones simples mezclado con el ejercicio anterior.

Por otro lado, si $x \in E$ con $f(x) > 0$, entonces, $f(x) = f^+(x)$ y además,

$$\phi_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x) = \varphi_n(x) \to f^+(x) = f(x).$$

Por otro lado, si $x \in E$ con $f(x) \leq 0$, entonces, $f(x) = -f^-(x)$ y además,

$$\phi_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x) = -\psi_n(x) \to -f^-(x) = f(x).$$

Luego, se tiene que $\phi_n \to f$ puntualmente en E.

Falta verificar que $|\phi_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primero verifiquemos que $f^+ + f^- = f$, pues, si $x \in E$ tal que $f(x) > 0$, entonces, $|f(x)| = f(x)$, $f(x) = f^+(x)$ y $f^-(x) = 0$ entonces,

$$|f(x)| = f(x) = f^+(x) = f^+(x) + f^-(x).$$

Por otro lado, si $x \in E$ tal que $f(x) \leq 0$, entonces, $|f(x)| = -f(x)$, $f(x) = -f^-(x)$ y $f^+(x) = 0$ entonces,

$$|f(x)| = -f(x) = -(-f^-(x)) = f^+(x) + f^-(x).$$

y se tiene que $f^+ + f^- = f$.

Por último,

$$|\phi_n(x)| = |\varphi_n(x) - \psi_n(x)| \le |\varphi_n(x)| + |\psi_n(x)| \le f^+(x) + f^-(x) = f(x).$$

$(\Leftarrow)$

Si suponemos que existe una sucesión de funciones simple $\{\varphi_n\}$ tal que $\varphi_n \to f$ puntualmente, entonces, se tiene que f es el límite puntual de una función medible, entonces, f es medible.

Con esto se concluye la demostración. $\square$

EJERCICIO 10

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y suponga que existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ se tiene

$$|f(x)| \le M.$$

Demuestre que existen sucesiones $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tales que

(i) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, es decir, se verifica

$$\varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in E$.

(ii) $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, es decir, se verifica

$$\psi_{n+1}(x) \le \psi_n(x)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in E$.

(iii) $\varphi_n \to f$ y $\psi_n \to f$ uniformemente en E.

Antes de la Demostración.

El Lema de Aproximación Simple nos será de gran utilidad, recordémoslo:

Lema 1 (Lema de Aproximación Simple.)**.** *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y supongamos que es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \le M \quad \textit{para todo } x \in E.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones simples $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : E \to \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x) \quad \textit{y} \quad \psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) < \varepsilon \textit{ para todo } x \in E.$$

Demostración. Recordemos el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \ge N$, se tiene

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Como $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el Lema de Aproximación Simple asegura que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un par de funciones simples $\varphi_n, \psi_n : E \to \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi_n(x) \le f(x) \le \psi_n(x) \quad \text{y} \quad \psi_n(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{n} \text{ para todo } x \in E.$$

Demostremos que $\varphi_n \to f$ y $\psi_n \to f$ uniformemente respecto en E. Pues, si $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \ge N$ se verifica

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

Entonces, tomando $n \ge N$, se tiene que para cada $x \in E$, se verifica $\varphi_n \le f$ y $f \le \psi_n$, de modo que

$$|\varphi_n(x) - f(x)| = f(x) - \varphi_n(x) \ge 0 \quad \text{y} \quad |\psi_n(x) - f(x)| = \psi_n(x) - f(x) \ge 0$$

y por lo tanto

$$|\varphi_n(x) - f(x)| = f(x) - \varphi_n(x) \le (\psi_n(x) - f) + (f - \varphi_n(x)) < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

es decir,

$$|\varphi_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in E \text{ y para todo } n \ge N,$$

en resumen, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge N$, entonces, para cada $x \in E$ se verifica

$$|\varphi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

que es lo mismo que $\varphi_n \to f$ uniformemente en E.

Por otro lado, tomando $n \geq N$, se tiene que para cada $x \in E$, se verifica $\varphi_n \leq f$ y $f \leq \psi_n$, de modo que

$$|\varphi_n(x) - f(x)| = f(x) - \varphi_n(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad |\psi_n(x) - f(x)| = \psi_n(x) - f(x) \geq 0$$

y por lo tanto

$$|\psi_n(x) - f(x)| = \psi_n(x) - f(x) \leq (\psi_n(x) - f) + (f - \varphi_n(x)) < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

es decir,

$$|\psi_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in E \text{ y para todo } n \geq N,$$

en resumen, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces, para cada $x \in E$ se verifica

$$|\psi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

que es lo mismo que $\psi_n \to f$ uniformemente en E.

Luego, podría suceder perfectamente que $\{\psi_n\}$ no sea decreiente y que $\{\varphi_n\}$ no sea creciente. Pero, consideremos las sucesiones $f_n, g_n : E \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\} \quad \text{y} \quad g_n(x) = \min\{\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\}.$$

$\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son subsucesiones de $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$, respectivamente, son funciones simples (pueden demostrarlo por inducción combinado con el ejercicio 2).

Como

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

en particular,

$$f_n \leq f \leq g_n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

por ser $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son subsucesiones de $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$, respectivamente. Por el mismo argumento, la convergencia de $f_n \to f$ y $g_n \to f$ uniformemente se tiene gratuitamente.

Con ésto, se concluye la demostración. $\square$