UNIVERSIDAD DE CHILE

# Ayudantía 5

Matías Saavedra, Catalina Olea, Kevin Guerrero
Profesora: Verónica Poblete
22 de abril de 2024

---

1. Sea $V$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Pongamos $v_1 := sen(x)$, $v_2 := cos(x)$ y $v_3 := e^x$. Demuestre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $V$.

2. Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $F$ y sea $L : V \longrightarrow W$ una función lineal. Definamos la función
$$\hat{L} : W^* \longrightarrow V^*$$
entre sus espacios duales $W^* := Hom(W, F)$ y $V^* := Hom(V, F)$ mediante la fórmula
$$(\hat{L}(g))(v) := g(L(v)) \quad (g \in W^*, v \in V)$$
   a) Demuestre que $\hat{L}$ es lineal.
   b) Suponga que $L$ es epiyectiva. Demuestre que $\hat{L}$ es inyectiva.

3. Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cuya imagen este generada por los vectores $(1, 2, 0, -4)$ y $(2, 0, -1, -3)$.

4. Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x - 3y)$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por $g(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y - z)$. Usando sólo bases canónicas, encuentre las matrices asociadas a $f, g, f \circ g$ y $g \circ f$.

5. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $f : V \longrightarrow V$ dada por
$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = -a_2 + (a_0 - a_2)x + (a_1 - a_2)x^2$$
   a) Verifique que es una transformación lineal.
   b) Escriba la imagen de los elementos de la base $\beta = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$
   c) Escriba la matriz $A$ de $f$ en la base $\beta$.
   d) Compruebe que las coordenadas de $f(b_0 + b_1x + b_2x^2)$ en base $\beta$ corresponden al transpuesto del vector que resulta de hacer $A \cdot (b_0, b_1, b_2)^t$.