Universidad de Chile

Ayudantía 4

Matías Saavedra, Catalina Olea, Kevin Guerrero
Profesora: Verónica Poblete
15 de abril de 2024

---

1. Sean V_1, V_2 K-espacios vectoriales y $f : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_1 + V_2$ la función $f(v_1, v_2) := v_1 + v_2$.

   a) Demuestre que f es una función lineal epiyectiva.

   Demostración. Primero demostraremos que es una función lineal, sean $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$ y $\alpha \in K$, tenemos que

$$\begin{aligned} f((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) = f(v_1 + w_1, v_2 + w_2) &= (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \\ &= (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= f(v_1, v_2) + f(w_1, w_2) \end{aligned}$$

   y

$$f(\alpha(v_1, v_2)) = f(\alpha v_1, \alpha v_2) = (\alpha v_1 + \alpha v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha f(v_1, v_2)$$

   Por lo tanto es función lineal, ahora sea $x \in V_1 + V_2$ por definición existen $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ y $\alpha, \beta \in K$ tales que

$$x = \alpha v_1 + \beta v_2$$

   En particular una preimagen de x es $(\alpha v_1, \beta v_2)$, es decir f es epiyectiva.

   $\square$

   b) ¿Bajo que condición (sencilla) es f un isomorfismo? Cuando lo sea, escriba su función inversa $f^{-1} : V_1 + V_2 \longrightarrow V_1 \times V_2$.

   Demostración. Como ya hemos demostrado que es epiyectiva, solo nos falta probar que es inyectiva, es decir $Ker(f) = \{0_{V_1+V_2}\}$. Por lo tanto sea

$$f(v_1, v_2) = 0_{V_1+V_2}$$

   Esto implica que $v_1 + v_2 = 0$ por lo tanto $v_1 = -v_2$, como los dos son subespacios vectoriales tenemos que

$$v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$$

   De esto concluimos que para que f sea inyectiva debemos de tener que $V_1 \cap V_2 = \{0_{V_1+V_2}\}$, y se define la función inversa como

$$\begin{aligned} f^{-1} : V_1 + V_2 &\longrightarrow V_1 \times V_2 \\ x = \alpha v_1 + \beta v_2 &\longmapsto (\alpha v_1, \beta v_2) \end{aligned}$$

   $\square$

2. Sea $T : V \longrightarrow V$ un operador (una función lineal entre un espacio vectorial a si mismo) y sea V finitamente generado. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes.

   (i) T es inyectivo.

   (ii) T es sobreyectivo.

   (iii) T es biyectivo.

   Demostración. $(i) \implies (ii)$ Supongamos que T es inyectiva, por ejercicio de ayudantia anterior tenemos que

$$dim(V) = n = dim(Im(T))$$

   Como $Im(T)$ es subespacio vectorial de V y además tiene la misma dimensión, entonces $Im(T) = V$. Por lo tanto T es sobreyectiva.

   $(ii) \implies (iii)$ Supongamos que T es sobreyectiva, por lo tanto $Im(T) = V$, usando el teorema de la dimensiones tenemos que

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(Ker(T)) + dim(V)$$

   Es decir $dim(Ker(T)) = 0$, es decir T es inyectiva, como T es inyectiva y sobreyectiva entonces es biyectiva.

   $(iii) \implies (i)$ Supongamos que T es biyectiva, en particular es inyectiva.

   □

3. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z, t) := (x + y - z, 2x + 2y - 2z, 5x + 5y + 5z)$$

   a) Encuentre una base $\{v_1, v_2\}$ de $Ker(f)$ y una base de $Im(f)$.

   Demostración. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x + y - z, 2x + 2y - 2z, 5x + 5y + 5z) = (0, 0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

   Por lo tanto debemos resolver el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 0 \\ 5x + 5y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

   Donde $z = 0$ y $x = -y$ son la soluciones, por lo tanto

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{(-y, y, 0, t) \mid f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{(-y, y, 0, 0) + (0, 0, 0, t) \mid f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{y(-1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1) \mid f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \langle\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}\rangle \end{aligned}$$

   Como $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ son un conjunto linealmente independiente y genera $Ker(f)$, entonces son una base de $Ker(f)$.

   □

b) Encuentre $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que v_1, v_2, v_3, v_4 sea una base de $\mathbb{R}^4$.

Demostración. Usando

$$v_3 = (0,0,1,0) \quad \text{y} \quad v_4 = (1,0,0,0)$$

se tiene que $B = \{(-1,1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(1,0,0,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^4$.

$\square$

4. Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal y supongamos que $f(v_1), ..., f(v_n)$ es linealmente independiente, para ciertos $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Demuestre que $v_1, v_2, ..., v_n$ es linealmente independiente. ¿Es cierto el recíproco de este ejercicio o se necesitan hipótesis adicionales?

   Demostración. Supongamos que $f(v_1), ..., f(v_n)$ es linealmente independiente para ciertos $v_1, v_2, ..., v_n$, por otro lado tenemos que demostrar que para

   $$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V$$

   implica que $\alpha_i = 0$. Aplicando f tenemos

   $$f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_n f(v_n) = f(0_V) = 0_W$$

   Como los $f(v_1), ..., f(v_n)$ son linealmente independientes, tenemos que $\alpha_i = 0$ que es lo que queríamos demostrar. En conclusión los $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes.

   Y para que el recíproco sea cierto necesitamos que f sea inyectiva.

   $\square$