UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 1

Matías Saavedra, Catalina Olea, Kevin Guerrero
Profesora: Verónica Poblete
25 de marzo de 2024

---

1. Sea V un K-espacio vectorial con K cuerpo, demuestre las siguientes propiedades:

   a) El inverso aditivo de cada $v \in V$ es único.

   Demostración. Supongamos que $v_1, v_2 \in V$ son inversos aditivos de v, por lo que:

   $$v + v_1 = v_1 + v = 0_V \quad \text{y} \quad v + v_2 = v_2 + v = 0_V$$

   en particular

   $$v_1 = v_1 + 0_V = v_1 + (v + v_2) = (v_1 + v) + v_2 = 0_V + v_2 = v_2$$

   □

   b) $(-1_K) \cdot v$ es el inverso aditivo de $v \in V$, donde -1_K denota el inverso aditivo del neutro para la multiplicación de K.

   Demostración. Como ya hemos demostrado que el inverso aditivo es único, solo necesitamos demostrar que $v + (-1_K) \cdot v = 0_V$, por lo que tenemos que:

   $$v + (-1_K) \cdot v = 1_K \cdot v + (-1_K) \cdot v = (1_K - 1_K) \cdot v = 0_K \cdot v = 0_V$$

   □

   c) Sean $\alpha \in K$ y $v \in V$, demuestre que $\alpha \cdot v = 0_V$ ssi $\alpha = 0_K$ (el neutro para la suma K), o $v = 0_V$.

   Demostración.($\Longleftarrow$) Usando propiedades demostradas en el apunte, tenemos que:

   $$0_K \cdot v = 0_V \quad \text{y} \quad \alpha \cdot 0_V = 0_V$$

   ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\alpha \cdot v = 0_V$, tenemos que:

   $$\begin{aligned} \alpha v &= 0_V \\ \alpha v &= v - v \\ \alpha v + v &= v \\ (\alpha + 1_K)v &= 1_K \cdot v \end{aligned}$$

   Por lo que usando (d), tenemos que $\alpha + 1_K = 1_K$ ó $v = 0_V$, es decir, $\alpha = 0_K$ ó $v = 0_V$. □

   d) Sean $\alpha, \beta \in K$ y $v \in V$, demuestre que $\alpha \cdot v = \beta \cdot v$ ssi $\alpha = \beta$ o $v = 0_V$.

   Demostración.($\Longrightarrow$) Lo demostraremos por contrareciproco, por lo que supongamos que $\alpha \neq \beta$ y $v \neq 0_V$, en particular $\alpha - \beta \neq 0_K$, por lo tanto:

   $$0_V \neq (\alpha - \beta) \cdot v = \alpha \cdot v - \beta \cdot v \quad \Longrightarrow \quad \alpha \cdot v \neq \beta \cdot v$$

($\Longleftarrow$) Si $\alpha = \beta$ entonces $\alpha - \beta = 0_K$, por lo que:

$$(\alpha - \beta) \cdot v = \alpha \cdot v - \beta \cdot v = 0_V \quad \Longrightarrow \quad \alpha \cdot v = \beta \cdot v$$

Y si $v = 0_V$, tenemos que:

$$\alpha \cdot v = 0_V = \beta \cdot v$$

□

e) Sean $v_1, v_2, v \in V$, demuestre que $v + v_1 = v + v_2$ ssi $v_1 = v_2$. Es decir, hay cancelación en V.

Demostración.($\Longrightarrow$) Supongamos que $v + v_1 = v + v_2$, por lo que:

$$(v + v_1) - v = (v + v_2) - v \quad \Longrightarrow \quad 0_V + v_1 = 0_V + v_2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_2$$

($\Longleftarrow$) Si $v_1 = v_2$ entonces sumando v tenemos $v + v_1 = v + v_2$. □

2. Sea V un K-espacio vectorial, demostrar las siguientes propiedades:

a) Si V_1, V_2 son subespacios vectoriales de V, entonces la intersección $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración. Notemos que $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ ya que $0_V \in V_1 \cap V_2$. Ahora sean $x, y \in V_1 \cap V_2$ y $\alpha \in K$, en particular:

$$x, y \in V_1 \quad \wedge \quad x, y \in V_2$$

Como V_1 y V_2 son subespacios vectorial de V, tenemos que:

$$x + \alpha y \in V_1 \quad \wedge \quad x + \alpha y \in V_2$$

Es decir $x + \alpha y \in V_1 \cap V_2$, concluyendo así que $V_1 \cap V_2$ es subespacio vectorial de V. □

b) Si V_1, V_2 son subespacios vectoriales de V, entonces

$$V_1 + V_2 := \{v \in V \,|\, \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \alpha_1, \alpha_2 \in K \text{ tales que } v = \alpha v_1 + \alpha_2 v_2\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Demostración. Notemos que $V_1 + V_2 \neq \varnothing$ ya que $0_V \in V_1$. Ahora sean $x, y \in V_1 + V_2$ y $\alpha \in K$, en particular $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, $y = \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$ para ciertos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in K$, $v_1, v_3 \in V_1$ y $v_2, v_4 \in V_2$. Notemos que:

$$x + \alpha y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha\alpha_3 v_3 + \alpha\alpha_4 v_4 = (\alpha_1 v_1 + \alpha\alpha_3 v_3) + (\alpha_2 v_2 + \alpha\alpha_4 v_4)$$

Como V_1, V_2 son subespacios vectoriales de V y K es un cuerpo, se concluye que $x + \alpha y \in V_1 + V_2$. □

c) Si V_1, V_2 son subespacios vectoriales de V, demostrar que $V_1 \cup V_2$ es un subespacio vectorial de V ssi $V_1 \subseteq V_2$ o $V_2 \subseteq V_1$.

Demostración.($\Longrightarrow$) Nuestra hipótesis es que $V_1 \cup V_2$ es un K-subespacio vectorial, supongamos que $V_1 \not\subseteq V_2$ y $V_2 \not\subseteq V_1$, entonces existen $v_1 \in V_1 \setminus V_2$ y $v_2 \in V_2 \setminus V_1$.

Notemos que $v_1 + v_2 \in V_1 \cup V_2$, ya que $v_1, v_2 \in V_1 \cup V_2$ y por hipótesis es subespacio vectorial. Esto implica que $v_1 + v_2 \in V_1$ ó $v_1 + v_2 \in V_2$, por lo que:

- Si $v_1 + v_2 \in V_1$, como V_1 es subespacio vectorial entonces $v_1 + v_2 - v_1 = (v_1 - v_1) + v_2 = 0_V + v_2 = v_2 \in V_1$. $\Longrightarrow\Longleftarrow$
- Si $v_1 + v_2 \in V_2$, como V_2 es subespacio vectorial entonces $v_1 + v_2 - v_2 = v_1 + (v_2 - v_2) = v_1 + 0_V = v_1 \in V_2$. $\Longrightarrow\Longleftarrow$

Por lo tanto $V_1 \subseteq V_2$ ó $V_2 \subseteq V_1$.

($\Longleftarrow$) Ahora supongamos que $V_1 \subseteq V_2$ ó $V_2 \subseteq V_1$, tenemos que demostrar que $V_1 \cup V_2$ es un subespacio vectorial.

- Si $V_1 \subseteq V_2$, entonces $V_1 \cup V_2 = V_2$ como V_2 es subespacio vectorial entonces también lo es $V_1 \cup V_2$.
- Si $V_2 \subseteq V_1$, entonces $V_1 \cup V_2 = V_1$ como V_1 es subespacio vectorial entonces también lo es $V_1 \cup V_2$.

De las dos formas se tiene que $V_1 \cup V_2$ es subespacio vectorial. □

3. Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales (con el mismo cuerpo de escalares) y considere el producto cartesiano $V_1 \times V_2$, en el que se define la suma y el producto escalar mediante:

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$$
$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Pruebe que con estas operaciones el conjunto $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial. Si V_1 y V_2 tienen dimensión finita, compruebe que:

$$dim(V_1 \times V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$$

Demostración. Tenemos que demostrar las 8 propiedades de espacio vectorial, por lo tanto sean $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in V_1 \times V_2$ y $\alpha, \beta \in K$, tenemos:

1.- $$\begin{aligned}(x + y) + z = [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) \\ &= (x_1 + y_1, z_1, x_2 + y_2 + z_2) \\ &= (x_1, x_2) + [(y_1 + z_1, y_2 + z_2)] \\ &= x + (y + z)\end{aligned}$$

2.- $$\begin{aligned}x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2) \\ &= (y_1, y_2) + (x_1, x_2) = y + x\end{aligned}$$

3.- El elemento neutro es $(0_{V_1}, 0_{V_2})$.

4.- El inverso de $x = (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ es $-x = (-x_1, -x_2)$.

5.- $$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta \cdot (x_1, x_2)) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2) &= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot (x_1, x_2) \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.\text{-}(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)(x_1,x_2) = ([\alpha+\beta]x_1,[\alpha+\beta]x_2) &= (\alpha x_1+\beta x_1, \alpha x_2+\beta x_2) \\ &= (\alpha x_1,\alpha x_2)+(\beta x_1,\beta x_2) \\ &= \alpha(x_1,x_2)+\beta(x_1,x_2) \\ &= \alpha x+\beta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.\text{-}\alpha(x+y) = \alpha(x_1+y_1,x_2+y_2) &= (\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_2+\alpha y_2) \\ &= (\alpha x_1,\alpha x_2)+(\alpha y_1,\alpha y_2) \\ &= \alpha x+\alpha y \end{aligned}$$

8.- $1\cdot x = 1\cdot(x_1,x_2) = (1\cdot x_1, 1\cdot x_2) = (x_1,x_2) = x$

Ahora bien si $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V_1 y $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ es una base de V_2, notemos que:

$$(v_1,0),(v_2,0),...,(v_n,0),(0,w_1),(0,w_2),...,(0,w_m)$$

Es base de $V_1 \times V_2$, por lo tanto $dim(V_1 \times V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$. □

4. Considere el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ el sistema formado por las matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar las coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ en la base S de una matriz genérica M de V:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Demostración. Usando $\alpha_1 = a-b-c+d, \alpha_2 = -a+b+c, \alpha_3 = a-c$ y $\alpha_4 = c$ tenemos:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

□

b) Comprobar que S es una base de V.

Demostración. Por (a) tenemos que las 4 matrices generan V, solo falta comprobar que son un conjunto linealmente independiente, tenemos:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, en particular S es linealmente independiente y como S genera V, concluimos que S es base de V. □