Cúspides y clases de grupos de Bianchi

Paulina Martinez

Profesor: Luis Arenas

20 de julio de 2024

---

1. Introducción

El siguiente texto pretente ser un desarrollo detallado de la demostración de un resultado que relaciona el número de cúspides del Grupo de Bianchi con la cardinalidad del grupo de clases de O_d, el anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) = K_d$.

2. Definiciones y resultados necesarios

Definición 1. *Decimos que* Γ *es un grupo Kleiniano si es un sub-grupo discreto de* $PSL(2,\mathbb{C})$*,donde este último es el cuociente del grupo* $SL(2,\mathbb{C})$ *de las matrices de* 2×2 *con coeficientes complejos y determinante 1 con su centro* $\{\pm I\}$*.*

Notar que siendo $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL(2,\mathbb{C})$, vía la acción fraccional lineal dada por

$$z \longmapsto \frac{za+b}{cz+d},$$

γ actúa sobre la recta proyectiva compleja $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Esta acción puede extenderse a otra sobre

$$H^3 := \Big\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 | t > 0\Big\}$$

vía la extención de Poincaré. Cada γ ha de ser un producto de un número par de inversiones en círculos y líneas en $\mathbb{C}$. Veamos esto primero considerando que $\hat{\mathbb{C}}$ puede ser identificado con la frontera de H^3 ($\partial H^3 = \big\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 | t = 0\big\}$). Cada cículo $\mathcal{C}$ y línea l en $\mathbb{C}$ tiene un único hemisferio $\hat{\mathcal{C}}$ o plano $\hat{l}$ en H^3 el cual ha de ser ortogonal a $\mathbb{C}$ y lo intersecta en $\mathcal{C}$ o l. La extensión de Poincaré de γ a H^3 se ha de corresponder con el producto de inversiones en $\hat{\mathcal{C}}$ y reflexiones en $\hat{l}$.

Estas inversiones y reflexiones son isometrías de H^3 con la métrica hiperbólica y generan $IsomH^3$, así bajo la extención de Poincaré, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ se identifica con el las isometrías de H^3 que preservan orientación $Isom^+H^3$.

Consideremos las siguientes clasificaciones para cada uno de los elementos en algún subgrupo de $\mathrm{PLS}(2,\mathbb{C})$:

- γ es elíptica si $tr(\gamma) \in \mathbb{R}$ y $|tr(\gamma)| < 2$.
- γ es parbólica si $|tr(\gamma)| = \pm 2$.
- γ es loxodrómica en cualquier otro caso.

En su acción sobre $\hat{\mathbb{C}}$, γ es parabólica si y sólo si tiene exactamente un único punto fijo, en cuyo caso será conjugada a la traslación $z \longmapsto z+1$. Tambien $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ actúa transitivamente sobre la recta proyectiva compleja es transitiva, por lo tanto los estabilizadores puntuales son conjugados a B, el estabilizador de ∞:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} | a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

A los sub-grupos $\Gamma_d = \mathrm{PSL}(2,\, O_d)$ se les conoce como Grupos de Bianchi. Notar que, al ser O_d un sub-anillo discreto y unitario de $\mathbb{C}$, entonces se tiene un sub-grupo discreto de $\mathrm{PSL}(2,\, \mathbb{C})$, así que los Grupos de Bianchi son grupos Kleinianos. Esto implica que actúan discontínuamente en H^3, es decir, para todo subconjunto compacto K de H^3, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma_d | \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ es finito. El estabilizador de un punto en H^3 es finito. Siendo Γ_∞ el estabilizador de ∞ en un subgrupo de PSL(2,$\mathbb{C}$) ($\Gamma_\infty \subset B$), este puede desbribirse de las siguientes maneras:

- Cíclico finito.
- Una extensión finita de in grupo cíclico infinito generado por un elemento loxodrómico y por uno parabólico.
- Una extensión finita de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, el cual es generado por un par de elementos parabólicos.

Definición 2. *A un punto $\zeta \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le llamamos cúspide del grupo Γ si el estabilizador de ζ en Γ contiene un grupo abeliano libre de rango 2 ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).*

Los aiguientes 3 teoremas pueden ser encontrados en el libro el libro *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*[2]

Teorema 1. *Sea Γ un grupo Kleiniano de covolumen finito. Si Γ no es cocompacto entonces contiene un elemento parabólico, si ζ es el punto fijo de tal elemento parabólico, entonces ζ es una cúspide. Aún más, existe finitas clases de $\Gamma-$equivalencia de cúspides.*

Teorema 2. *Si M en un 3-orbifold hiperbólico orientable, entonces M es isométrico a H^3/Γ, donde Γ es un grupo Kleiniano libre de torsión.*

Teorema 3. *Si M en un 3-orbifold hiperbólico orientable de volumen finito, entonces M tiene finitas vecindades de cúspides y cada una de ellas es isométrica a $T^2 \times [0, \infty)$, donde T^2 es un toro.*

Notemos que, al ser O_d el anillo de enteros de K_d, dado un elemeto $\rho \in K_d$ este se puede expresar de la forma $\frac{u}{v}$ con $u, v \in O_d$. Además, las coordenadas homogéneas $[u, v] \in \mathbb{P}^1(K_d)$ se describirán como la clase de equivalencia de puntos en ${K_d}^2$ dada por la proporcionalidad de los puntos, a saber, $[u, v] \sim [u', v']$ si y sólo si existe $\lambda \in K_d$ tal que $\lambda[u, v] = [u', v']$.

Lema 1. *Existe una biyección entre el conjunto de las cúspides de Γ_d y los elementos de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1(K_d)$.*

Demostración: [5] Usando la afirmación de que los grupos de bianchi son grupos aritméticos y que estos tienen covolumen finito, se tiene que entonces Γ_d tiene covolumen finito, luego por el teorema 3 se deduce que H^3/Γ_d tiene finitas cúspides.
Sea $\mathcal{C}_d$ el conjunto de cúspides de Γ_d, notamos que dado $\zeta \in \mathcal{C}_d$ podemos encontrar un elemento $[u, v] \in \mathbb{P}^1(K_d)$. Tomemos ahora $[u, v] \in \mathbb{P}^1(K_d)$, vemos que $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} 1+uv & -u^2 \\ v^2 & 1-uv \end{smallmatrix}\right]$ (un elemento parabólico de Γ_d) es tal que $\gamma.[u, v] = [u, v]$, es decir, este $[u, v] \in \hat{\mathbb{C}}$ es una cúspide. Así, se tiene una biyección entre $\mathcal{C}_d$ y $\mathbb{P}^1(K_d)$.

Definición 3. *Un Ideal fraccional de O_d es un O_d-submódulo I de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ tal que existe $a \in O_d$ que satisface $aI \subseteq O_d$. Diremos que I es un ideal principal fraccional si además esta generado por un solo elemento.*

Notar que como O_d es un módulo de rango 2 sobre $\mathbb{Z}$ entonces sus ideales fraccionales podrán ser generados por dos elementos.

Definición 4. *Sean H el grupo de ideales fraccionales y P el grupo de ideales principales fraccionales. El Grupo de clases C_{O_d}, es el grupo cuociente H/P. A los elementos de C_{O_d} los denotaremos $[(u, v)_{O_d}]$ siendo $(u, v)_{O_d}$ el ideal fraccional de O_d generado por u y v.*

Lema 2. *[5]Sean dos puntos $[u, v]$ y $[u', v']$ de $\mathbb{P}^1(K_d)$, entonces existe $\gamma \in \Gamma_d$ tal que $\gamma.[u, v] = [u', v']$ si y sólo si $[(u, v)_{O_d}] = [(u', v')_{O_d}]$.*

Demostración: Supongamos que existe $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_d$ tal que $[u', v'] = \gamma.[u, v] = [au + bv, cu + dv]$, luego por definición de coordenadas homogéneas en el plano proyectivo, existe un $\lambda \in K_d$ no nulo tal que $au+bv = \lambda u'$ y $cu+dv = \lambda v'$. Con esto, si tomamos los ideales generados por ambos elementos, se tiene $(au+bv, cu+dv)_{O_d} = \lambda(u', v')_{O_d}$, luego sus clases son iguales: $[(au+bv, cu+dv)_{O_d}] = [(u', v')_{O_d}]$. Queremos demostrar entonces que $[(au + bv, cu + dv)_{O_d}] = [(u, v)_{O_d}]$.

Llamemos a $au + bv = u_0$ y $cu + dv = v_0$, luego, es evidente que $u_0 \in (u, v)_{O_d}$ y $v_0 \in (u, v)_{O_d}$, así tenemos que el ideal $(u_0, v_0)_{O_d}$ está contenido en $(u, v)_{O_d}$.

Ahora bien, notemos que:

$$du_0 - bv_0 = dau + dbv - bcu - bdv = (da - bc)u = (1)u,$$

pues $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_d$.

De la misma manera:

$$cu_0 + av_0 = -cau - cbv + acu + adv = (ad - cb)v = v.$$

Así, sea $\mu \in (u, v)_{O_d}$, entonces $\mu = mv+nu = m(cu_0+av_0)+n(du_0-bv_0) = u_0(-mc+nd)+v_0(ma-nb)$, luego $\mu \in (u_0, v_0)_{O_d}$. Se tiene entonces que $(u, v)_{O_d} = (u_0, v_0)_{O_d}$ y $[(au + bv, cu + dv)_{O_d}] = [(u, v)_{O_d}]$.

[4]Dados dos pares u, v y u', v' en O_d, supongamos ahora $[(u, v)_{O_d}] = [(u', v')_{O_d}]$ y sin pérdida de generalidad asumiremos $(u, v)_{O_d} = uO_d + vO_d = I$, $(u', v')_{O_d} = u'O_d + v'O_d = I$. Usando el producto usual en ${K_d}^2$ dada por $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, no es difícil notar que $\langle (u, v), {O_d}^2\rangle = I = \langle (u', v'), {O_d}^2\rangle$. Luego, desarrolando un poco vemos que $\langle (u, v), I^{-1}{O_d}^2\rangle = \langle (u', v'), I^{-1}{O_d}^2\rangle = O_d$:

$$\langle (u, v), I^{-1}{O_d}^2\rangle = uI^{-1} + vI^{-1} = O_d,$$

$$\langle (u', v'), I^{-1}{O_d}^2\rangle = u'I^{-1} + v'I^{-1} = O_d.$$

Tomemos β y $\beta' \in I^{-1}{O_d}^2$ tales que $\langle (u, v), \beta\rangle = u\beta_1 + v\beta_2 = 1$ y $\langle (u', v'), \beta'\rangle = 1$. Como $(u, v) \in I{O_d}^2$ se tiene:

$$1 = \langle (u, v), \beta\rangle \in \langle I{O_d}^2, \beta\rangle \subset \langle I{O_d}^2, I^{-1}{O_d}^2\rangle = O_d,$$

luego $\langle I{O_d}^2, \beta\rangle = O_d$ pues 1 está en este ideal. De la misma manera $\langle I{O_d}^2, \beta'\rangle = O_d$.

Ahora bien, definiremos un par de conjuntos:

$$M = \Big\{x \in I{O_d}^2 : \langle x, \beta\rangle = 0\Big\},$$

$$M' = \Big\{y \in I{O_d}^2 : \langle y, \beta'\rangle = 0\Big\}.$$

Con ellos se tendrá que $O_d(u, v) \oplus M = I{O_d}^2 = O_d(u', v') \oplus M'$.

Notar que $O_d(u, v) \oplus M \subset I{O_d}^2$ es inmediato. Para $I{O_d}^2 \subset O_d(u, v) \oplus M$, tomaremos $z \in I{O_d}^2$, elemento que podemos escribir de la siguiente manera:

$$z = \langle z, \beta\rangle(u, v) + \big(z - \langle z, \beta\rangle(u, v)\big),$$

para el cual $\langle z,\beta\rangle \in \langle I{O_d}^2,\beta\rangle = O_d$, luego $\langle z,\beta\rangle(u,v) \in O_d(u,v)$. Además

$$\langle (z - \langle z,\beta\rangle(u,v)),\beta\rangle = \langle z,\beta\rangle - \langle z,\beta\rangle\langle (u,v),\beta\rangle = 0,$$

luego $(z - \langle z,\beta\rangle(u,v)) \in M$. Así $O_d(u,v) \oplus M = I{O_d}^2$ (es análogo para $O_d(u',v') \oplus M'$).

Ahora debería ser $M = J\gamma$ y $M' = J'\gamma'$, con J, J' ideales y para algunos $\gamma,\gamma' \in {K_d}^2$ (*esto por el teorema de estructura para módulos finitamente generados sobre dominios de Dedekind*[3]). Notamos que $\bigwedge^2 {K_d}^2 = \{p \in \mathbb{C} : p = n \wedge m,\ \text{con } n, m \in {K_d}^2\}$ es unidimensional, por lo que se tiene $(u,v)\wedge\gamma = x((u',v')\wedge\gamma')$ para algún $x \in K_d$ invertible. Si reemplazamos γ' por $x^{-1}\gamma'$ y J' por xJ', resulta ahora que

$$(u,v)\wedge\gamma = u\gamma_2 - v\gamma_1 = x((u',v')\wedge x^{-1}\gamma') = (u'\gamma_2' - v'\gamma_1') = (u',v')\wedge\gamma'. \tag{2.1}$$

Luego, si calculamos $I{O_d}^2 \wedge I{O_d}^2$, se tiene

$$I{O_d}^2 \wedge I{O_d}^2 = \big(O_d(u,v) \oplus J\gamma\big) \wedge \big(O_d(u,v) \oplus J\gamma\big) = J\big((u,v)\wedge\gamma\big),\ \text{luego}$$

$$I{O_d}^2 \wedge I{O_d}^2 = \big(O_d(u',v') \oplus xJ'x^{-1}\gamma'\big) \wedge \big(O_d(u',v') \oplus xJ'x^{-1}\gamma'\big) = xJ'\big((u',v')\wedge x^{-1}\gamma'\big) = J'1\big((u',v')\wedge\gamma'\big).$$

Con esto y usando el resultado 2.1, se tiene obtiene la siguiente relación:

$$J\big((u,v)\wedge\gamma\big) = J\big((u',v')\wedge\gamma'\big) = J'\big((u',v')\wedge\gamma'\big)$$

En particular $J = J'$. Por lo tanto podemos escribir $O_d(u,v) \oplus J\gamma = I{O_d}^2$ y $O_d(u',v') \oplus J\gamma' = I{O_d}^2$.

Finalmente, tomemos $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2,K_d)$ tal que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(u,v)^T = (u',v')^T$ y $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\gamma^T = \gamma'^T$, esto es:

$$(au + bv, cu + dv)^T = (u',v')^T \text{ y } (a\gamma_1 + b\gamma_2, c\gamma_1 + d\gamma_2)^T = (\gamma_1', \gamma_2')^T.$$

Como se tiene la igualdad 2.1,

$$u\gamma_2 - v\gamma_1 = (au + bv)(c\gamma_2 + d\gamma_1) - (cu + dv)(a\gamma_2 + b\gamma_1),$$

$$u\gamma_2 - v\gamma_1 = ad(u\gamma_1) + bc(v\gamma_2) - cb(u\gamma_1) - ad(v\gamma_2),$$

$$u\gamma_2 - v\gamma_1 = (ad - cb)(u\gamma_2 - v\gamma_1),$$

luego $det(A) = 1$, por lo tanto $A \in SL(2,K_d)$.

Ahora notamos que, dado $h \in I{O_d}^2 = O_d(u,v) \oplus J\gamma$, este puede escribirse $h = m(u,v) + j\gamma$ con $m \in O_d$ y $j \in J$, luego se tiene

$$Ah^T = A(m(u,v)^T + j\gamma^T) = m(u',v')^T + j\gamma'^T \in I{O_d}^2.$$

La matriz A conserva $I{O_d}^2$ y por ende también a ${O_d}^2$. Luego, por esto $A \in GL(2,O_d)$, así $A \in GL(2,O_d) \cap SL(2,K_d) = SL(2,O_d)$. Cómo buscamos que la matríz actúe sobre la recta proyectiva compleja $K_d \cup \infty$, cuocientamos con el centro de $SL(2,O_d)$ y entonces A deberá estar en PSL$(2,O_d)$.

3. Número de cúspides y clases

Teorema 4. *Sea Γ_d un grupo de Bianchi, entonces existe una biyección entre el Grupo de clases C_{O_d} y las clases de Γ_d-equivalencia de cúspides del grupo.*

Demostración: Definamos la función

$$\psi : \mathcal{C}_d \longrightarrow C_{O_d}$$
$$[u,v] \longmapsto [(u,v)_{O_d}],$$

Como una clase $I \in C_{O_d}$ puede ser generado por 2 elementos en K_d, entonces existen $u, v \in K_d$ tales que $[(u,v)_{O_d}]$ representa a I en C_{O_d}, luego $\psi([u,v]) = [(u,v)_{O_d}] = I$, por lo tanto ψ es sobreyectiva.

Sean un par de ideales en C_{O_d} $[(u,v)_{O_d}]$ y $[(u',v')_{O_d}]$, por el lema 2 si estas clases no son la misma, entonces no existe una matriz $\gamma \in \Gamma_d$ tal que $\gamma.[u,v] =[u',v']$, estos puntos no pertenecen a la misma Γ_d-órbita. Esto nos da la inyectividad. Esto induce una biyección entre las clases de equivalencia de las cúspides y el grupo de clases C_{O_d}.

4. Ejemplo

Analizaremos el grupo de bianchi $\mathrm{PSL}(2, O_5)$, el cual gracias a uno de los programas de Keith Matthews en BCMaths/PHP (programa) sabemos que el número de clases de $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ es 2, es decir qué en su grupo de clases está la clase trivial $[(1)]$ y la del ideal no principal $[J] = [(2, 1+\sqrt{-5})_{O_5}]$[1]. Usando la biyección vista en el teorema 4, entonces se tienen los puntos en K_5 $[2, 1+\sqrt{-5}]$ y [1,1], para los cuales existen las matrices parabólicas en PSL(2,$\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$)

$$\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{-5} & -4 \\ -4+2\sqrt{-5} & -1-2\sqrt{-5} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

las cuales fijan a estos puntos respectivamente, lo que según el teorema 1 implica que son cúspides de Γ_5.

Referencias

[1] Luis Arenas Carmona. Teoría de números algebraicos. pages 64, 72–73, Septiembre 2022.

[2] Alan W. Reid Colin Maclachlan. *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*, pages 54–55. Springer, 2003.

[3] Richard M. Foote David S. Dummit. *Abstract Algebra*, page 771. John Wiley Sons, 2004.

[4] Paul B. Garret. *Holomorphic Hilbert Modular Forms*, page 7. Wadsworth, 1990.

[5] tynanochse. Cusps on bianchi orbifolds. `https://tynanochse.com/2018/03/29/cusps-on-bianchi-orbifolds/`, 2018. Accedido en mayo de 2024.