



UNIVERSIDAD DE CHILE

UNIVERSIDAD DE CHILE

MC880-3

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

---

# Complejos de espacios para acciones de grupos de tipo aritmético en árboles y edificios

---

*Profesor guía:*

Luis Arenas C.

*Alumno:*

Alejandro Araya C.

20 de julio de 2024

## Índice

<b>1. Demostraciones.</b>	<b>3</b>
1.1. El Árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{F}((u))$ .	3
1.2. La acción de $GL_2(\mathbb{F}[t])$ sobre el Árbol de Bruhat-Tits.	4
1.3. Órbitas y Estabilizadores.	7
1.4. Construyendo sobre el cociente.	13

## Introducción.

A través de la Teoría de Bass-Serre, se ha desarrollado una noción más general de la relación que hay entre Amalgamas, Cocientes de Árboles y los grupos General Lineal y Especial Lineal de un Cuerpo Local. Consecuencia de esto, tenemos que estructuras algebraicas como los Grafos de Grupos permiten codificar por completo la información de un Grupo actuando sobre un Árbol. Por ello, poder determinar información sobre estos Grafos de Grupos, nos permite determinar a su vez información sobre los Grupos en cuestión. Luego resulta natural buscar herramientas sobre un Grafo de Grupos para así obtener características del Grupo. Una herramienta presentada en [Ser02] es el Grupo Fundamental de un Grafo de Grupos, para ello, se tiene que los Complejos Simpliciales ayudan a la realización de cálculos sobre un Espacio Topológico, dando herramientas para calcular Grupos Fundamentales. En particular, el trabajo de [Mar13] busca conocer las propiedades topológicas y geométricas de ciertos Grupos. Esto lo hace desde la perspectiva de los Complejos Simpliciales y sobre lo hecho por Serre, construyendo una estructura llamada “Complejos de Espacios”, cuyo fin es el poder clasificar estos Grupos de acuerdo a sus características topológicas y geométricas al actuar sobre espacios topológicos.

Por todo lo anterior, con el fin de conocer y entender la construcción de un “Complejo de Espacios”, se trabajará para encontrar un ejemplo. Por nuestra parte trabajaremos el caso de  $GL_2(\mathbb{F}[t])$  abordado en [Ser02], pero lo intentamos afrontar, con el uso de Transformaciones de Moebius, apoyándonos en la propuesta dada por [AAC18] y [Are14]. A partir de ello, tomando el Cuerpo Local  $\mathbb{F}((u))$  (Cuerpo de Series de Laurent sobre  $\mathbb{F}$  un cuerpo finito), y realizando la construcción de su Árbol de Bruhat-Tits  $\tau(\mathbb{F}((u)))$ , buscaremos describir la acción de  $GL_2(\mathbb{F}[t])$  sobre  $\tau(\mathbb{F}((u)))$ . Esto último, lo haremos utilizando la relación con un árbol de Bolas equivalente a  $\tau(\mathbb{F}((u)))$  construido sobre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}((u)))$ , permitiéndonos establecer una conexión entre las transformaciones de Moebius y  $GL_2(\mathbb{F}[t])$ . Por falta de tiempo, nos quedamos a puertas de construir un Complejo de Espacios para el Grafo de Grupos asociado a  $GL_2(\mathbb{F}[t])$ , pero se pudo establecer las nociones iniciales que permitirían desarrollarlo.

## Resultados.

Tomando un Cuerpo Local  $K$ , podemos construir un grafo relacionado a él, este grafo tiene como vértices Clases de Retículados, donde los Retículados son submódulos libres de rango 2 descritos sobre el anillo valuación del Cuerpo Local. Así, tenemos una acción descrita por  $GL_2(K)$ , esta acción explícitamente toma la base del Retículado y usa la multiplicación usual de matrices para obtener una base nueva, luego lo generado por dicha base pertenece a alguna Clase de Retículados. De aquí, tenemos que dicha acción mueve vértices en vértices, además de mover aristas en aristas. Dicha acción, posee Inversiones, es decir, invierte aristas; por lo que nosotros trabajaremos un ejemplo concreto, el cual es sobre el Cuerpo Local  $\mathbb{F}((u))$  y tomaremos la acción de  $GL_2(\mathbb{F}[t])$ , con  $t = u^{-1}$ . Esta última, es una acción sin Inversiones, este hecho no se demostrará.

A partir de ello, nuestros resultados principales en la Unidad de Investigación son los siguientes:

**Teorema 0.1.** El cociente  $GL_2(\mathbb{F}[t]) \setminus \tau(\mathbb{F}((u)))$  es un segmento de recta.

**Teorema 0.2. Teorema de Nagao.**  $GL_2(\mathbb{F}[t])$  es el producto amalgamado de los Estabilizadores de su acción sobre el árbol  $\tau(\mathbb{F}((u)))$  a través de su intersección. En particular, esta amalgama se puede reducir a  $GL_2(\mathbb{F}[t]) = B_1 *_A B_2$ , con  $B_1$  Estabilizador del vértice  $v_0$  y  $B_2$  unión de los Estabilizadores del resto de vértices que no comparten órbita con  $v_0$ .

La demostración de estos se apoyarán en resultados obtenidos por Serre, donde se pide que la acción sea sin Inversiones, para lo que nuestro ejemplo cumple sin problemas.

Tras esto se intenta construir un Complejo de Grupos sobre  $GL_2(\mathbb{F}[t])$  que nos permita finalmente construir un Complejo de Espacios. Debido a la falta de tiempo, esta labor queda incompleta, por lo que sólo se establecerán las definiciones y las ideas que permitirían concretar esta labor, además se concluye presentando la definición de un Complejo de Espacios.

## 1. Demostraciones.

### 1.1. El Árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{F}((u))$ .

**Definición 1.1.** Sea  $K$  un cuerpo,  $K$  se dice Cuerpo Local, si posee un valor absoluto completo, denotado por la letra  $\rho$ , y es localmente compacto con la topología descrita por  $\rho$ .

A partir de un cuerpo local  $K$  se toma su anillo de valuación  $\mathcal{O}$  y un elemento uniformizante  $\pi \in K^*$ . De ello, se puede tomar un conjunto de clases de Retículos, sobre el cual se puede describir una estructura combinatorial de grafo, lo cual permite construir un árbol, para más detalles revisar [Ser02].

Alternativamente podemos realizar el siguiente procedimiento para construir un árbol, lo ejemplificaremos tomando el cuerpo de series de Laurent  $\mathbb{F}((u))$  de un cuerpo finito  $\mathbb{F}$  con  $|\mathbb{F}| = q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

$\mathbb{F}((u))$  es un cuerpo local con el valor absoluto  $\rho(x) = c^{-deg(x)}$ ,  $1 < c$ ,  $x \in \mathbb{F}((u))$ . Recordando que  $\mathbb{F}((u))$  es el cuerpo de fracciones de  $\mathbb{F}[[u]]$ , tendremos que este será nuestro anillo de valuación y podemos tomar a  $u$  como su uniformizante. Además,  $\mathbb{F}[[u]]/u\mathbb{F}[[u]] \cong \mathbb{F}$ , por lo que podemos tomar  $R = \mathbb{F}$  donde  $R$  es el conjunto de representantes de cada clase de dicho cociente. Así, a partir del cuerpo residual  $\mathbb{F}[[u]]/u\mathbb{F}[[u]]$ , tomamos  $R = \{a_1, a_2, \dots\}$ , donde  $d(a_i, a_j) = \rho(a_i - a_j)$ ,  $a_i, a_j \in R$  y dado que ambos son elementos de  $\mathbb{F}$  tenemos que  $a_i - a_j = k \in \mathbb{F}$ . Así,  $\rho(k) = c^0 = 1$ .

Antes de continuar, será bueno tener en cuenta la siguiente noción. Una función racional sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  de variable  $t = u^{-1}$ , es una función de la forma  $\frac{P(t)}{Q(t)}$ , con  $P(t), Q(t) \in \mathbb{F}[t]$ ,  $Q(t) \neq 0$ . Cuando  $Q(t) \in \mathbb{F}^*$ , se tiene el grado usual de un polinomio en  $t$ , de otra forma, tenemos que el grado se expresa como  $gr\left(\frac{P(t)}{Q(t)}\right) = gr(P(t)) - gr(Q(t))$ . Luego tenemos que  $gr\left(\frac{1}{t}\right) = -gr(t) = -gr(u^{-1})$ , donde podemos ver que  $gr\left(\frac{1}{t}\right) = gr(t^{-1}) = deg(u)$ . Por lo tanto, podemos extender el grado de estas funciones racionales al grado de  $\mathbb{F}((u))$ . Donde  $gr(t) = -deg(u)$ .

De lo anterior, para cada representante podemos tomar su clase  $a_i + u\mathbb{F}[[u]]$  y llevarla a su cociente  $(a_i + u\mathbb{F}[[u]])/u^2\mathbb{F}[[u]]$ , luego este último tiene clases de la forma  $a_i + u(b_j) + u^2\mathbb{F}[[u]]$ . Sin pérdida de generalidad, podemos escoger  $b_j \in R$ , de esta forma, tomando dos clases distintas y revisando su distancia, tenemos que  $d(a_i + u(b_j), a_k + u(b_l)) = \rho(a_i - a_k + [b_j - b_l]u)$  donde tenemos que si  $a_i \neq a_k$ , entonces  $\rho(a_i - a_k + [b_j - b_l]u) \leq 1$ . Por otra parte, si  $a_i = a_k$ , se tiene  $\rho([b_j - b_l]u) = c^{-1}$ . Este procedimiento se puede continuar con cualquiera de estas nuevas clases y después de  $n$  iteraciones tendremos que las clases serán de la forma  $\sum_{i=0}^{n-1} e_i u^i + u^n \mathbb{F}[[u]]$ ,  $e_i \in R$  y análogamente, la distancia entre dos clases distintas es  $d\left(\sum_{i=0}^{n-1} e_i u^i, \sum_{i=0}^{n-1} d_i u^i\right) = \rho\left(\sum_{i=0}^{n-1} [e_i - d_i] u^i\right)$ , esta distancia será menor o igual que  $c^{-t}$ , donde  $t$  es el menor índice para el que  $e_t$  y  $d_t$  son distintos, es decir, mientras más coeficientes compartan, más “cerca” se encuentran.

Una observación importante, la distancia tomada nos permite notar que mientras más iteraciones se realicen, las clases tenderán a tener distancia cero, es decir, terminan en un único elemento al tener los mismos coeficientes para cada índice, el cual será de la forma  $c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u^i$ .

Luego este es el desarrollo como serie de un elemento de  $\mathbb{F}[[u]]$ . Del mismo modo, podemos obtener las clases de  $\mathbb{F}[[u]]$  respecto a  $u^{-1}\mathbb{F}[[u]]$ , donde al extenderse este procedimiento, tenemos que las clases al caer en un único elemento serán de la forma  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i u^i$ , el que claramente es el desarrollo en serie de un elemento de  $\mathbb{F}((u))$ .

A partir de lo anterior se puede construir un grafo, identificando las clases en cada iteración como vértices al mismo nivel, donde las aristas serán segmentos que unirán cada vértice con los asociados a la siguiente iteración de su clase, por ejemplo, tomando el vértice asociado a la clase  $a_i + u\mathbb{F}[[u]]$  de este se trazará una arista a cada vértice asociado a alguna clase de  $(a_i + u\mathbb{F}[[u]])/u^2\mathbb{F}[[u]]$ , luego nos quedaría algo de la siguiente forma:

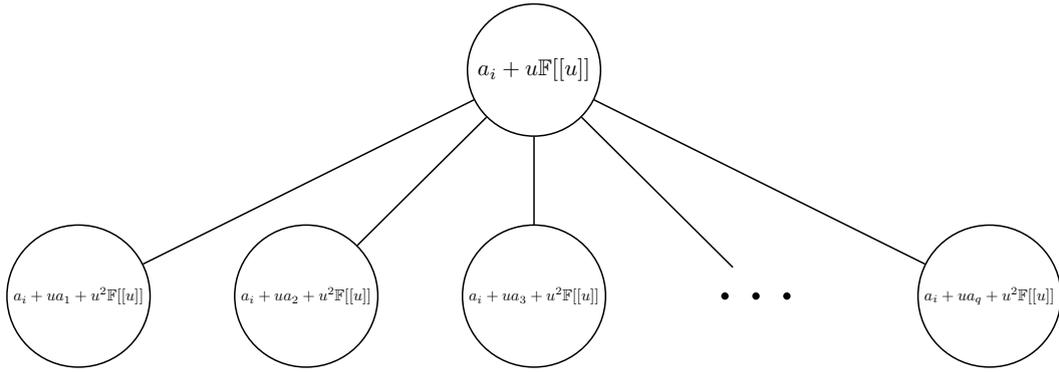


Figura 1: Dibujo del ejemplo dado, donde “...” representa los  $q - 4$  vértices que no aparecen en el dibujo.

**Definición 1.2.** El grafo  $\tau(\mathbb{F}((u))) = (V, E)$  obtenido al tomar como conjunto de vértices todas las clases obtenidas con el procedimiento anterior y como conjunto de aristas todos los segmentos mencionados previamente, se dice el **Árbol de Bruhat-Tits** de  $\mathbb{F}((u))$ .

Notamos que por construcción los vértices tienen cierto “nivel” de acuerdo a la iteración en la que se encuentran, por ello nos interesa formalizar esta intuición.

**Definición 1.3.** El nivel de un vértice  $v$ , será el índice  $-n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  donde la clase asociada al vértice es de la forma  $\sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i u^i + u^n \mathbb{F}[[u]]$ .

**Definición 1.4.** Un vértice  $v$  se dice hijo de otro vértice  $w$  (o  $w$  es padre de  $v$ ), si existe una arista entre ellos y  $v$  se encuentra a un nivel menor que  $w$ .

## 1.2. La acción de $GL_2(\mathbb{F}[t])$ sobre el **Árbol de Bruhat-Tits**.

Seguiremos trabajando en nuestro ejemplo sobre  $\mathbb{F}((u))$ . Así, tomaremos el anillo de polinomios  $\mathbb{F}[t]$ , donde  $u^{-1} = t$  y denotaremos  $G = GL_2(\mathbb{F}[t])$ . En [AAC18] se nos da una segunda forma de ver el árbol construido en la **Sección Anterior**. Esta será esencial para poder trabajar con mayor comodidad la acción de  $G$  en  $\tau(\mathbb{F}((u)))$ . Antes de seguir, vamos a necesitar ciertas definiciones y aclaraciones de notación, para poder comprenderlo de mejor manera.

Por notación, la Bola Cerrada en  $z$  de radio  $\rho(u)^r$  se escribirá como  $B_z^{|\rho(u)^r|}$ , comúnmente se le denota también como  $B_z[\rho(u)^r]$ . Luego, en  $\mathbb{F}((u))$  (y realmente como en cualquier cuerpo local no arquimediano) una bola cerrada puede tener como centro a cualquier elemento contenido en ella, así siempre que tengamos dos bolas cerradas en  $\mathbb{F}((u))$  tendremos que una contiene a la otra o son

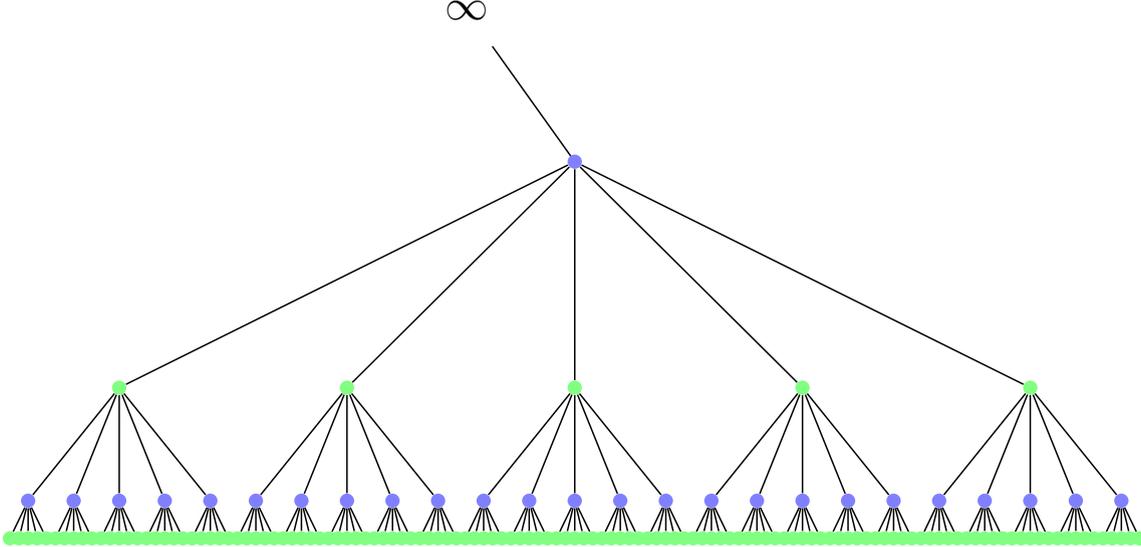


Figura 2: Árbol de Bruhat-Tits de  $\mathbb{F}_5((u))$ ,

disjuntas. Así, definimos que en el caso de tener una bola contenida en otra, podemos escoger  $z$  en ellas, junto a sus radios  $r, s \in \mathbb{Z}$  tales que la distancia entre  $B_z^{|r|}$  y  $B_z^{|s|}$  es  $|r - s|$ . Además, si son disjuntas, buscamos la bola más pequeña  $C$  que contenga a ambas y su distancia será la suma de las distancias entre cada una hacia esta bola  $C$ .

A partir de dichas bolas y esta distancia, podemos construir un grafo  $\beta$  donde cada vértice es una Bola cerrada  $B_z^{|r|}$ , y cada arista será una tupla de la forma  $(B_z^{|r|}, B_z^{|s|})$  tal que  $|r - s| = 1$ , es decir, se trazará una arista entre dos bolas a distancia uno. Este grafo  $\beta$  es un árbol isomorfo al árbol  $\tau(\mathbb{F}((u)))$  descrito en la sección anterior, esto debido a la correspondencia biyectiva que existe entre Reticulados y Bolas Cerradas, donde el centro y el radio de la Bola se asocian a la base de un Reticulado Libre de rango 2 sobre  $\mathbb{F}[[u]]$ .

Apoyándonos en la sección anterior, cada clase se puede representar como una Bola cuyo radio depende de la iteración en la que se encuentre dicha clase, y cada elemento de  $\mathbb{F}[[u]]$  lo podemos ver como una intersección infinita de dichas Bolas, lo que se reafirma cuando miramos a  $\beta$ . Luego los vértices asociados a las clases obtenidas del procedimiento para construir dicho árbol, se pueden ver como Bolas cerradas con un cierto radio  $c^t$ , con  $t$  el nivel de dicho vértice. De hecho, notamos que todos los vértices que son hijos de algún vértice a nivel  $t$ , también se encuentran dentro de la Bola cerrada de radio  $c^t$ , luego podemos ver las Bolas cerradas en  $\tau(\mathbb{F}((u)))$  y en  $\beta$  como "triángulos", tal y como se aprecia en la Figura 3.

Esta forma alternativa de ver el árbol también nos permite notar que el árbol se puede ver como una unión de Bolas, pero para abarcar el vértice en  $\infty$  debemos unir también un complemento de Bola para obtener el árbol completo. Esto nos permitirá ver la acción de  $G$  sobre el árbol de una forma bastante intuitiva.

**Definición 1.5.** Una transformación de Moebius es una función racional de la forma  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , tal que  $ad - bc \neq 0$ . En nuestro caso, consideraremos  $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}((u))) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}((u)))$ , con el consenso

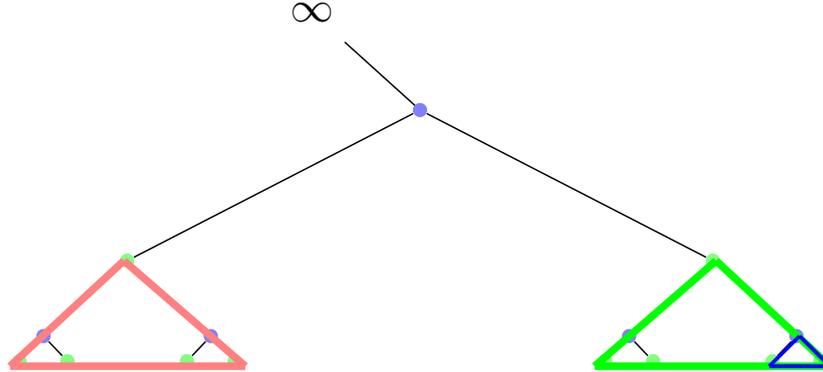


Figura 3: Árbol de Bruhat-Tits de  $\mathbb{F}_2((u))$  con Bolas cerradas representadas por triángulos de colores, donde la verde contiene a la azul y la roja es disjunta de la verde.

de que  $f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$  y  $f(\infty) = \frac{a}{c}$ .

Esta definición nos permite notar que si una transformación de Moebius  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{F}[t]$  cumple  $ad - bc = 0$ , Entonces es constante. Así, nos interesará que  $f(z)$  cumpla  $ad - bc \neq 0$ , donde hay un grupo bastante conocido que posee esta misma condición.

Las Transformaciones de Moebius forman un grupo con la composición, este grupo lo denotaremos con la letra  $\mathbb{M}$ . Existe un isomorfismo entre  $\mathbb{M}$  y  $PGL_2(\mathbb{F}((u)))$ , en particular, podemos decir que  $G \lesssim PGL_2(\mathbb{F}((u)))$ , por lo que existe una copia de  $G$  en  $\mathbb{M}$ . Esta correspondencia es importante, puesto que estableceremos una forma de computar la acción de  $G$  sobre el árbol. De ahora en adelante nuestras transformaciones de Moebius sólo tendrán coeficientes en  $\mathbb{F}[t]$ , es decir, tomaremos aquellas directamente relacionadas con  $G$ .

Como se mencionó previamente, el árbol se puede ver como una unión de Bolas, de hecho, podemos pensarlas como Bolas en  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}((u)))$  donde tenemos que las Transformaciones de Moebius sí están definidas. De esta forma, es posible establecer una acción de las Transformaciones de Moebius sobre el árbol de Bolas  $\beta$ . Sea  $f(z)$  una transformación de Moebius y digamos que  $\beta = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q \cup B^c$ , donde las  $B_i$  son Bolas Cerradas en  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}((u)))$  y  $B^c$  es un complemento de Bola, para alguna bola  $B$ . La acción  $f * B_i = f(B_i)$ , desplaza  $B_i$  a  $f(B_i)$ , donde esta última es una Bola o un complemento de Bola. Además,  $\beta = f(B_1) \cup f(B_2) \cup \dots \cup f(B_q) \cup f(B^c)$ .

La acción descrita se corresponde con nuestra acción de  $G$  en el árbol  $\tau(\mathbb{F}((u)))$ , luego la acción de una matriz sobre un vértice, la cual es difícil de imaginar y calcular, se puede caracterizar vía transformaciones de Moebius sobre el árbol de Bolas  $\beta$ . Dado que las transformaciones de Moebius son isometrías, la distancia entre Bolas se mantiene. Así, para poder determinar la imagen de un vértice  $v_k$ , a nivel  $k$ , bajo la acción de  $G$ , podemos tomar tres elementos  $a, b$  y  $e$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}((u)))$ , que cumplan lo siguiente: Si  $B_k$  es la Bola asociada al vértice  $v_k$ , entonces al menos dos de los tres elementos deben estar contenidos en ella. Si la Bola contiene a los tres elementos, es la Bola más pequeña que los contiene. Si sólo contiene a dos de los tres elementos, es la Bola más pequeña que los contiene. Por lo tanto, como la acción por transformaciones de Moebius preserva la distancia entre Bolas, también preserva la configuración existente entre la Bola  $B_k$  y los elementos escogidos (que se pueden ver como Bolas). En consecuencia, la imagen de  $B_k$  se puede determinar a partir de las imágenes de estos elementos elegidos, “triangulando” la posición de esta a través de la cercanía

que poseen la imagen de los elementos escogidos.

Lo anterior, es una forma de decir que si nosotros viéramos dichos elementos en el árbol  $\tau(\mathbb{F}((u)))$ , tendríamos que al recorrer el árbol partiendo desde alguno de estos elementos, digamos  $a$ , intentado llegar a cualquiera de los otros,  $b$  o  $e$ , habrían vértices en común entre ambos caminos. En particular, con las condiciones establecidas, escoger elementos que cumplan dichas condiciones obliga a siempre pasar por el vértice  $v_k$  al recorrer el árbol desde un elemento a otro, a esta noción es la que llamaremos ser el Incentro de  $a$ ,  $b$  y  $e$ .

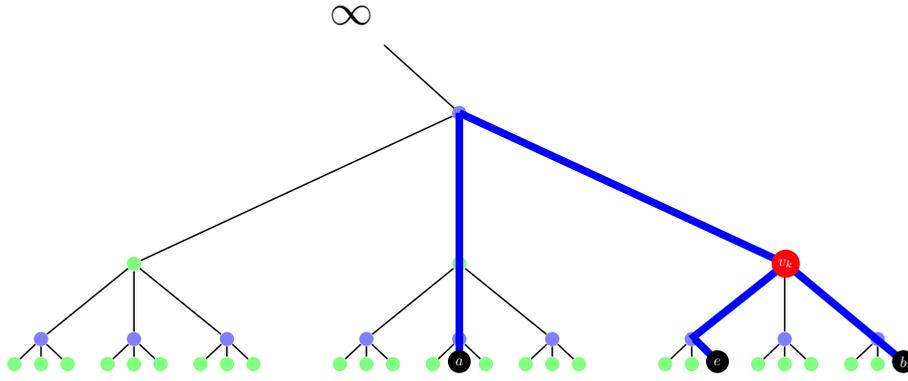


Figura 4: Árbol de Bruhat-Tits de  $\mathbb{F}_3((u))$  en el que las líneas azules, representan los caminos entre  $a$ ,  $b$  y  $e$  (puntos negros). Su Incentro es el vértice  $v_k$  (punto rojo).

### 1.3. Órbitas y Estabilizadores.

**Definición 1.6.** La “Bola de Vértice  $v_0$ ”, será aquella Bola asociada a al vértice  $v_0$ . Donde,  $v_0$  es el vértice que contiene al anillo de valuación, es decir, todos los elementos cuyo grado sea positivo. En particular, esta Bola es la más pequeña que contiene a las clases que caen a los elementos 0 y 1. Se denotará  $B_{v_0}$

**Definición 1.7.** Sean  $v$  y  $w$  dos vértices de  $\tau(\mathbb{F}((u)))$ . Sean  $\{w_i\}_{1 \leq i \leq n}$  vértices tales que  $w_1 = v$  y  $w_n = w$ , donde para la arista  $a_{i,i+1}$  tenemos que su origen es el vértice  $w_i$  y su termino el vértice  $w_{i+1}$ , con  $1 \leq i \leq n - 1$ . La geodésica de  $v$  y  $w$ , será la concatenación de las aristas  $a_{i,i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , tal que comience en  $v$  y termine en  $w$ . Se denotará  $p(v, w)$ .

Demostración del teorema **Teorema 0.1.**

Primero estableceremos algo de notación, la imagen de un vértice  $v$  por una transformación de Moebius  $f(z)$  se denotará  $f(v)$ . Además, cuando mencionemos a algún elemento de  $\mathbb{F}$  o mencionemos a  $\infty$ , nos referiremos al vértice que está asociado a su clase. Por último, para dos vértices  $v, w$  la notación  $d(v, w)$  denota la cantidad de aristas que posee  $p(v, w)$ . Del mismo modo, seguiremos denotando  $G = GL_2(\mathbb{F}[t])$ .

Para poder demostrar lo pedido, debemos probar que para cualquier vértice de  $\tau(\mathbb{F}((u)))$  existe un elemento  $M \in G$  que lo lleve a un mismo segmento. Por lo tanto, demostraremos que todo vértice puede ir a  $p(v_0, \infty)$  y luego demostraremos que en  $p(v_0, \infty)$  hay tantas órbitas distintas como números naturales.

**Lema 1.1.** Bajo la acción de  $G$ , todo vértice de  $\tau(\mathbb{F}((u)))$  se puede llevar a  $p(v_0, \infty)$ .

*Demostración.* La demostración será por inducción sobre la distancia entre los vértices (o distancia entre Bolas). Comenzaremos tomando un vértice  $v$  en  $p(v_0, 0)$ , con  $d(v, v_0) = 1$ . Luego tenemos que existe  $f(z) = \frac{1}{z}$  transformación de Moebius asociada a un elemento de  $G$ . Así, tenemos que  $f(0) = \infty$ , y como estas transformaciones mantienen la cercanía entre vértices ahora  $p(v_0, 0)$  pasa a ser  $p(v_0, \infty)$ . En particular  $f(v)$  sigue estando a distancia 1 de  $v_0$ , pero pasa a estar en  $p(v_0, \infty)$ . Análogamente, si tomamos dicho vértice  $v$  en  $p(v_0, k)$  para algún  $k \in \mathbb{F}^*$ , luego basta tomar  $g(z) = z - k$  y tras ello post-componer por  $f(z)$ , ya que la composición  $(f \circ g)$  está asociada a un elemento en  $G$ . Así,  $g(z)$  lleva  $p(v_0, k)$  a  $p(v_0, 0)$  y  $f(z)$  lo lleva a  $p(v_0, \infty)$ , luego  $(f \circ g)(v)$  va a parar a  $p(v_0, \infty)$ .

Del mismo modo, si  $w \in p(v_0, \infty)$  está a distancia  $n$  de  $v_0$ , existe un vértice  $v_k$  en un camino de la forma  $p(w, et^n)$ , con  $e \in \mathbb{F}$ , tal que  $d(v_k, w) = 1$ . Luego sólo basta tomar  $h(z) = z - et^n$  y tenemos que el nivel de  $v_k$  es mayor o igual que el de  $v_0$ , por lo que  $h(v_k)$  se encuentra en  $p(v_0, \infty)$ , debido a que  $h(z)$  permuta el camino  $p(w, et^n)$  con  $p(w, 0)$ , es decir,  $h(v_k)$  se encuentra en  $p(w, v_0)$ .

Por lo anterior, ya tenemos nuestros casos base, por lo que ahora haremos el paso inductivo. Sea un vértice  $v$ , con  $d(v, w) = r$ ,  $r > 1$ ,  $w \in p(v_0, \infty)$ , luego existe un vértice  $v'$  en  $p(v, w)$  tal que  $d(v', w) = 1$  y  $d(v, v') = r - 1$ . Así, tenemos que existe una transformación  $f_1(z)$  asociada a un elemento de  $G$ , donde  $f_1(v')$  se encuentra en  $p(v_0, \infty)$  y  $d(f_1(v), f_1(v')) = r - 1$ . Si  $r - 1 = 1$ , tenemos que por lo visto anteriormente existe una transformación que lleva  $f_1(v)$  en  $p(v_0, \infty)$ . En cambio, si  $r - 1 > 1$  entonces existe un vértice  $v'' \in p(f_1(v), f_1(v'))$  tal que  $d(v'', f_1(v')) = 1$ , luego existe una transformación  $f_2(z)$  tal que  $f_2(v'') \in p(v_0, \infty)$  y  $d(f_2(v''), (f_2 \circ f_1)(v)) = (r - 1) - 1 = r - 2$ . Así, tenemos que si  $r - 2 > 1$  se puede iterar el procedimiento anterior, hasta que  $r - k = 1$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ , es aquí cuando entonces existe una transformación que lleva la imagen de  $f_k \circ \dots \circ f_1(v)$  en  $p(v_0, \infty)$ . Demostrando lo pedido.

—

Así, ahora encaminaremos la demostración para llegar a que hay una cantidad infinita numerable de órbitas, para ello lo haremos calculando Estabilizadores de vértices y a partir de estos, mostraremos que no pueden tener las mismas órbitas al poseer Estabilizadores distintos.

**Teorema 1.1.**  $Stab_G(v_0)$  es igual a  $GL_2(\mathbb{F})$ .

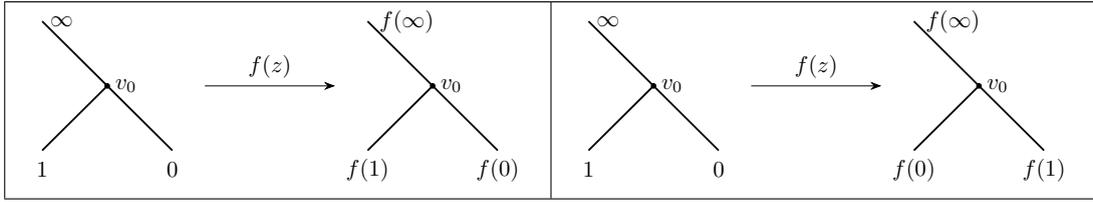
Recordemos que  $Stab_G(v_0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v_0 = v_0 \right\}$ .

*Demostración.* Comenzaremos notando que cualquier matriz de  $GL_2(\mathbb{F})$  se encuentra en  $Stab_G(v_0)$ , ya que la acción de matrices en  $GL_2(\mathbb{F})$  fijan a  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ , luego como el incentro de tres elementos en  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$  es  $v_0$ , tenemos que  $v_0$  se mantiene fijo. De esta forma, podemos (en particular) notar que las matrices que tengan asociada una transformación de Moebius  $h(z) = \frac{z}{e}$ ,  $e \in \mathbb{F}^*$ . Son parte del Estabilizador de  $v_0$ .

Así, ahora sólo basta demostrar que una matriz en  $Stab_G(v_0)$  sólo puede tener coeficientes en  $\mathbb{F}$ . Tomando  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Stab_G(v_0)$ , buscaremos su transformación  $f(z)$  asociada, para luego, hacerla actuar sobre el árbol. Recordando, sabemos que  $v_0$  se mantendrá fijo, si tras escoger tres elementos cuyo incentro sea  $v_0$ , la imagen de estos elementos mantiene como incentro a  $v_0$ . Sin pérdida de generalidad, podemos escoger a los puntos 0, 1 e  $\infty$ , ya que su incentro es  $v_0$  y sus imágenes son fáciles de calcular. Además, dado que el Estabilizador es subgrupo de  $G$ , tenemos que debe ser cerrado bajo su operación, luego si escogemos un elemento distinto de 1 podemos precomponer por

$h(z)$  (definido en el párrafo anterior), por lo que nuestro análisis sobre  $f(z)$  será el mismo que si hubiéramos escogido  $0, 1$  e  $\infty$ . Así, obtenemos  $f(0) = \frac{b}{a}$ ,  $f(1) = \frac{a+b}{c+d}$  y  $f(\infty) = \frac{a}{c}$ .

De ello podemos empezar notando que para poder mantener fijo a  $v_0$  es necesario que dos de los tres puntos escogidos deben seguir en la Bola del vértice  $v_0$  y deben tomar dos ramas distintas al bajar de  $v_0$ . Luego, de acuerdo a los valores de  $a, b, c, d$  tendremos varios casos. El primero de ellos es tener  $c = 0$  ó  $d = 0$ . Sin perdida de generalidad, tomando  $c = 0$  llegamos a que  $f(0) = \frac{b}{a}$ ,  $f(1) = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$  y  $f(\infty) = \infty$ . Luego tomando su determinante, llegamos a que  $ad \in \mathbb{F}^*$ , lo cual ocurre solamente si  $a, d \in \mathbb{F}^*$ . De ello es posible concluir que necesariamente  $b \in \mathbb{F}$ . Además llegamos a que  $f(0)$  y  $f(1)$  se alejan por el término  $\frac{a}{d} \neq 0$ , por lo que a partir de  $v_0$  toman dos ramas distintas. Por tal, cuando  $c = 0$  se tiene que necesariamente  $a, b, d \in \mathbb{F}$  para fijar a  $v_0$ . Es análogo con  $d = 0$ .

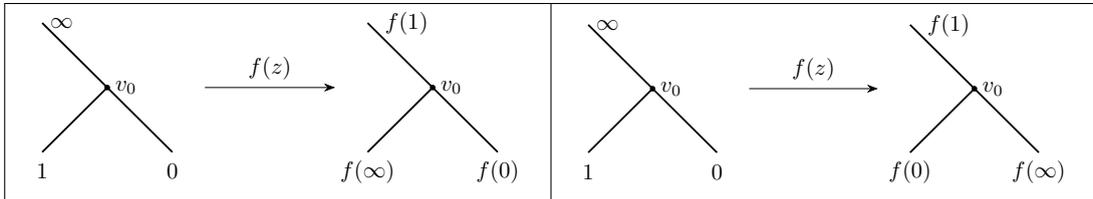


Cuadro 1: Casos en la aplicación de  $f(z)$  cuando  $c = 0$

Nuestro segundo caso será cuando  $c+d = 0$ , así tenemos que  $f(0) = \frac{b}{a} = \frac{-b}{c}$ ,  $f(1) = \infty$ ,  $f(\infty) = \frac{a}{c}$ . Revisando su determinante llegamos a que  $ad - bc = d(a + b) \in \mathbb{F}^*$ , luego  $c, d, (a + b) \in \mathbb{F}^*$ . Dado que las entradas de  $f(z)$  son las entradas de un elemento de  $Stab_G(v_0)$  tenemos que necesariamente  $f(0), f(\infty) \in B_{v_0}$ , así tenemos que  $a, b \in \mathbb{F}$ . De hecho, no puede ocurrir  $a = 0$  y  $b = 0$  al mismo tiempo y también ocurre  $a \neq -b$ , por lo que se encuentran en ramas distintas a partir de  $v_0$ .

Así, podemos ver los casos en los que  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$  y  $c + d \neq 0$ , donde tenemos que nuestro tercer caso a revisar es  $f(0) = p$  o  $f(\infty) = p$ , con  $p$  tal que su grado es mayor o igual a uno. Sin perdida de generalidad supongamos  $f(0) = p$ , luego tenemos que  $f(0) \notin B_{v_0}$ , luego como  $f(z)$  esta asociado a un elemento de  $Stab_G(v_0)$ , tenemos que  $f(1), f(\infty) \in B_{v_0}$ , así por  $f(1)$  tenemos que  $deg(a + b) \leq deg(c + d)$  y por  $f(\infty)$  tenemos que  $deg(a) \leq deg(c)$ . Del mismo modo, por  $f(0)$ , sabemos que  $deg(b) > deg(d)$ , por lo que podemos concluir que  $deg(a) + deg(d) < deg(a) + deg(b) \leq deg(c) + deg(b)$ . En consecuencia de lo anterior, tenemos que  $deg(ad) = deg(a) + deg(d) < deg(b) + deg(c) = deg(bc)$ , luego como  $ad - bc \in \mathbb{F}^*$  necesariamente  $deg(ad - bc) = 0$ , es decir,  $deg(b) + deg(c) = 0$  y debido a que son cantidades positivas, esto sólo se cumple si ambos son iguales a cero, pero de ser así  $f(0) \in \mathbb{F}$ , luego  $p \in \mathbb{F}$ , es decir,  $deg(p) = 0$ . Lo cual contradice nuestra afirmación inicial.

Así, tenemos que  $f(0)$  no posee grado mayor o igual a uno, el caso con  $f(\infty)$  es análogo. Por ello podemos concluir que para  $f(z)$  asociada a una matriz en  $Stab_G(v_0)$  no puede ocurrir  $deg(a) >$



Cuadro 2: Casos en la aplicación de  $f(z)$  cuando  $c + d = 0$

$\deg(c)$  y  $\deg(b) > \deg(d)$ .

Por último, nos falta ver el siguiente caso: Supongamos  $f(1) = p$ , donde  $\deg(p) \geq 1$ . Tomamos  $g(z) = \frac{1}{1-z}$ , donde no es difícil ver que  $g(z)$  está asociada a un elemento que estabiliza a  $v_0$ . Dado que  $f(z)$  también está asociada a un elemento de  $Stab_G(v_0)$ , tenemos que la composición  $(f \circ g)(z)$  está asociada a un elemento de  $Stab_G(v_0)$ . Luego, como  $f(1)$  tiene grado positivo, necesariamente debe ocurrir  $(f \circ g)(0)$  posee grado mayor o igual a 1, pero por lo visto anteriormente no existe un elemento en  $Stab_G(v_0)$  para el que ocurra eso. Contradiciendo lo demostrado anteriormente.

Por consecuente, tenemos que  $f(1)$  no puede tener grado mayor o igual a uno, lo que junto a lo anterior nos dice que para  $f(z)$  asociada a un elemento de  $Stab_G(v_0)$  la imagen de  $0, 1$  e  $\infty$  no puede tener grado mayor o igual a uno. Por lo tanto, tenemos que el punto  $i \in \{0, 1, \infty\}$  que sale de  $B_{v_0}$  necesariamente tiene que cumplir  $f(i) = \infty$ , pero dichos casos como consecuencia nos dicen que las componentes de la matriz asociada a  $f(z)$  son parte de  $\mathbb{F}$ , luego tenemos que  $Stab_G(v_0) \subseteq GL_2(\mathbb{F})$ . De esta forma,  $Stab_G(v_0) = GL_2(\mathbb{F})$ .  $\dashv$

De lo anterior, podemos empezar a demostrar que hay cantidad numerable de órbitas en  $p(v_0, \infty)$ . De ello, llamaremos al vértice padre de  $v_0$  como  $v_1$ , del mismo modo llamaremos al vértice padre de  $v_n$  como  $v_{n+1}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 1.2.** Los vértices  $v_0$  y  $v_2$  no comparten la misma órbita.

*Demostración.* Supongamos que  $v_2$  y  $v_0$  comparten la misma órbita, luego sus estabilizadores son conjugados, en particular, tenemos que poseen la misma cardinalidad y dado que  $Stab_G(v_0) = GL_2(\mathbb{F})$  tenemos que  $|Stab_G(v_2)| = (q^2 - 1)(q^2 - q)$ . El siguiente conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| f \in \mathbb{F}[t], \deg(f) \leq 2 \right\}$$

es un subgrupo de  $Stab_G(v_2)$ , donde no es difícil notar que  $|H| = q^3$ . Por Teorema de Lagrange, tenemos que  $|H|$  divide a  $|Stab_G(v_2)|$ , luego  $q^3$  divide a  $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ . Contradiciendo el teorema de Lagrange.

Por lo tanto  $v_0$  y  $v_2$  no poseen la misma órbita.  $\dashv$

**Lema 1.3.**  $Stab_G(v_1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & f \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{F}^*; f \in \mathbb{F}[t], \deg(f) \leq 1 \right\}$ .

*Demostración.* Recordemos que  $Stab_G(v_1) = \langle Stab_{Stab_G(v_1)}(v_0) \cup \{g_0, g_1, \dots\} \rangle$ , con  $g_i$  representantes de las clases del cociente  $Stab_G(v_1)/Stab_{Stab_G(v_1)}(v_0)$ . Así, comenzaremos notando que las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in Stab_G(v_0)$ , también estabilizan a  $v_1$ , luego  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in Stab_{Stab_G(v_1)}(v_0)$ .

Por otra parte, todos aquellos vértices que comparten órbita con  $v_0$ , poseen estabilizadores conjugados del de  $v_0$ . Así, procederemos revisando a los vecinos de  $v_1$  que comparten órbita con  $v_0$ , donde por el lema anterior podemos descartar a  $v_2$  de los candidatos a revisar. Sea  $v'$  tal que  $A = \begin{pmatrix} 1 & et \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

cumple  $A \cdot v' = v_0$ , luego tenemos que  $Stab_G(v') = A \cdot Stab_G(v_0) \cdot A^{-1}$ . Así,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Stab_G(v_0)$ ,

nos da  $\begin{pmatrix} a + cet & b + et(d - a) - ect^2 \\ c & d - cet \end{pmatrix} \in Stab_G(v')$ . Luego, para que este elemento fije tanto a  $v_0$  como a  $v'$  debe cumplir  $c = 0$  y  $d = a$ , donde no es difícil notar que este elemento fija también a  $v_1$ .

Por consecuente hay elementos de  $Stab_{Stab_G(v_1)}(v_0)$  de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . De lo anterior, tenemos que si  $d \neq a$  y  $c = 0$  es un elemento que fija  $v_0$  pero permuta la rama de  $v'$ , así los elementos de  $Stab_{Stab_G(v_1)}(v_0)$  son de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , donde si  $d = a$  recuperamos el caso en el que a parte de estabilizar a  $v_0$  estabiliza a todos los vecinos de  $v_1$  (también estabiliza a  $v_2$ , pero eso no será relevante de momento).

Para terminar de calcular  $Stab_G(v_1)$ , notamos que  $\begin{pmatrix} 1 & et \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  es un elemento fija a  $v_1$  pero a cambio permuta los vértices vecinos de este, de esta forma, podemos tomar a este elemento como un representante de la clase que permuta los vértices vecinos de  $v_1$  (exceptuando  $v_2$ ) en  $Stab_G(v_1)$ . Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} Stab_G(v_1) &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}^*, b \in \mathbb{F} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & et \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & f \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}^* \wedge f \in \mathbb{F}[t], \deg(f) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

–

**Teorema 1.2.** Sea  $v_n$  vértice padre de  $v_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , luego, no comparten la misma órbita. Más aún, el Estabilizador de  $v_n$  se compone de todas las matrices triangulares superiores cuyo coeficiente sobre la diagonal posee grado menor o igual a  $n$  y los coeficientes de la diagonal pertenecen a  $\mathbb{F}^*$ .

*Demostración.* Recordando lo demostrado en los lemas anteriores, tenemos el caso base,  $n = 1$ . Así, supongamos  $Stab_G(v_i) = \left\{ \begin{pmatrix} a & f \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}^* \wedge f \in \mathbb{F}[t], \deg(f) \leq i \right\}$ , para todo  $i \leq k$ , con  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Demostraremos que esto también se cumple para  $k + 1$ .

Primero probaremos que  $v_{k+2}$  y  $v_k$  no poseen la misma órbita,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Lo haremos por contradicción, supongamos que  $v_k$  y  $v_{k+2}$  comparten la misma órbita, luego tenemos que sus estabilizadores son conjugados, por lo que poseen la misma cardinalidad,  $Stab_G(v_k)$  es conocido y a través de este concluimos que  $|Stab_G(v_{k+2})| = (q-1)^2 q^{k+1}$ . Por otra parte, no es difícil notar que  $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f \in \mathbb{F}[t], \deg(f) \leq k+2 \right\}$  es un subgrupo de  $Stab_G(v_{k+2})$ , cuya cardinalidad es  $q^{k+3}$ , luego por Teorema de Lagrange tenemos que como  $K$  es subgrupo de  $Stab_G(v_{k+2})$ , entonces  $|K|$  divide a  $|Stab_G(v_{k+2})|$ , es decir,  $q^{k+3}$  divide a  $(q-1)^2 q^{k+1}$ . Contradiciendo dicho teorema.

De esta forma,  $v_{k+2}$  y  $v_k$  no poseen la misma órbita,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

Siguiendo con la demostración, no es difícil notar que  $Stab_{Stab_G(v_{k+1})}(v_k) = Stab_G(v_k)$ , dado que todos los elementos que fijan a  $v_k$  también fijan a  $v_{k+1}$ , ya que  $Stab_G(v_k)$  sólo permuta las ramas de los vértices que se encuentran a nivel menor o igual que  $k$ . Por último, basta notar que podemos escoger a  $\begin{pmatrix} 1 & et^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  como representante de aquellos elementos que no fijan a los vecinos de  $v_{k+1}$ , ignorando  $v_{k+2}$ , pero que si fija a  $v_{k+1}$ . De esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned} Stab_G(v_{k+1}) &= \left\langle Stab_G(v_k) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & et^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & f \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}^* \wedge f \in \mathbb{F}[t], \deg(f) \leq k+1 \right\}. \end{aligned}$$

Demostrando lo pedido.

$$\therefore \text{Stab}_G(v_n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & f \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}^* \wedge f \in \mathbb{F}[t], \text{deg}(f) \leq n \right\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

–

De esta forma, para terminar de demostrar que la acción de  $G$  sobre  $\tau(\mathbb{F}((u)))$  es un segmento de recta, basta notar que con lo obtenido podemos construir el siguiente grafo: Sea el conjunto de vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_n, \dots\}$  y sus aristas serán las tuplas de la forma  $(v_i, v_{i+1}), \forall i \in \mathbb{N}$ . Luego tenemos que cada  $v_i$  es un representante de cada órbita de la acción de  $G$  sobre el árbol, donde las aristas siguen esta correspondencia. Por lo tanto, el grafo definido es realmente  $G \backslash \tau(\mathbb{F}((u)))$ , es decir, el grafo cociente de la acción de  $G$  sobre el árbol, donde no es difícil ver que es un segmento de recta.

La demostración anterior, nos permite abordar y demostrar el **Teorema 0.2**, donde necesitaremos la siguiente noción.

**Definición 1.8.** Sea  $G$  un grupo actuando sobre un grafo  $X$ . Un Dominio Fundamental de  $X \text{ mod } G$  es un subgrafo  $\Gamma$  de  $X$  tal que  $\Gamma \rightarrow G \backslash X$  es un isomorfismo.

En la demostración anterior, tenemos que el grafo cociente de la acción de  $G \backslash \tau(\mathbb{F}((u)))$  es un Dominio Fundamental de  $\tau(\mathbb{F}((u))) \text{ mod } G$ , debido a que este es isomorfo a  $p(v_0, \infty)$ , el cual es un subgrafo de  $\tau(\mathbb{F}((u)))$ .

**Definición 1.9.** Un Grafo de Grupos  $(G, T)$  consiste de un grafo  $T$ , un grupo  $G_P$  para cada  $P$  vértice de  $T$  y un grupo  $G_y$  para cada  $y$  arista de  $T$ , junto con un monomorfismo  $G_y \rightarrow G_{t(y)}$  (donde  $t(y)$  denota el vértice donde termina  $y$ ); uno además requiere que  $G_y = G_{\bar{y}}$ . Si  $T$  es un Árbol,  $(G, T)$  se llamará Árbol de Grupos.

Del mismo modo, la demostración anterior nos da una noción de como obtener un Grafo de Grupos para  $G$ , esta es tomar  $T = G \backslash \tau(\mathbb{F}((u)))$ , a cada vértice  $v_i$  asignarle  $\text{Stab}_G(v_i)$  como su grupo  $G_{v_i}$ , para  $i \in \mathbb{N}$ . Por último a cada arista  $y$  entre dos vértices  $v_i, v_{i+1}$ ; le asignamos  $\text{Stab}_G(v_i) \cap \text{Stab}_G(v_{i+1})$  como su grupo  $G_y$ , luego el monomorfismo, es la incrustación canónica y  $G_y = G_{\bar{y}}$ . De hecho, tenemos que como  $T$  es un Árbol,  $(G, T)$  es un Árbol de Grupos. Esto será importante, puesto que parte de la Teoría desarrollada por Serre busca generalizar teoremas como el de Nagao. Así, tomaremos el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en [Ser02]:

**Teorema 1.3.** Sea  $G$  un grupo actuando sobre un grafo  $X$ , con el árbol  $T$  un Dominio Fundamental de  $X$ , Sea  $(G, T)$  un Árbol de Grupos, donde tenemos  $G_P$  y  $G_y$  Estabilizadores en  $G$ , para todo vértice  $P$  y arista  $y$  en  $T$ . Sea  $G_T = \varinjlim (G, T)$ , la Amalgama de  $G_P$  a lo largo de  $G_y$ . Las inclusiones  $G_P \rightarrow G$  se extienden a un homomorfismo  $G_T \rightarrow G$ . Las siguientes propiedades son entonces equivalentes:

1.  $X$  es un Árbol.
2.  $G_T \rightarrow G$  es un isomorfismo.

Una pequeña observación, es que en el teorema anterior:

$$G_T = G_{P_1} *_{G_{y_1}} G_{P_2} *_{G_{y_2}} \cdots *_{G_{y_{n-1}}} G_{P_n} *_{G_{y_n}} \cdots, \text{ para } P_i \text{ e } y_i \text{ vértices y aristas de } T, \text{ respectivamente.}$$

Con este teorema podemos realizar el siguiente análisis a  $T = G \backslash \tau(\mathbb{F}((u)))$ . Por lo anterior, tenemos que  $\text{Stab}_G(v_i) \lesssim \text{Stab}_G(v_{i+1})$  para  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Por ello, no es difícil concluir que lo que representa a la intersección de todos los Estabilizadores es  $A = \text{Stab}_G(v_0) \cap \text{Stab}_G(v_1)$  y del mismo modo,

tenemos que  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{F}^*; b \in \mathbb{F}[t] \right\}$  es la unión de los Estabilizadores de  $v_i, i \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Luego, tenemos que tomando el Árbol de Grupos  $(G, T)$ , construido anteriormente, se cumplen todas las hipótesis del teorema anterior y de hecho,  $G_T$  se reduce a sólo calcular la amalgama de  $Stab_G(v_0)$  y  $B$  a lo largo de  $A$ . Así, dado que  $\tau(\mathbb{F}((u)))$  es un árbol, tenemos que necesariamente debe ocurrir:  $G_T = Stab_G(v_0) *_A B \cong GL_2(\mathbb{F}[t])$ . Donde, debido a que el homomorfismo utilizado es la incrustación canónica, se tiene que  $GL_2(\mathbb{F}[t]) = Stab_G(v_0) *_A B$ . Demostrando el Teorema de Nagao.

#### 1.4. Construyendo sobre el cociente.

Tras todo lo visto, tenemos que [Mar13] antes de establecer lo que es un Complejo de Espacios, trabaja lo que se conocen como Complejos de Grupos, por lo que primero, tenemos que saber lo que eso significa. Así, tenemos las siguientes definiciones.

**Definición 1.10.** Una Small Category Without Loop (scwol), es un conjunto  $\mathcal{X} = (V(\mathcal{X}), E(\mathcal{X}))$ , donde  $V(\mathcal{X})$  es llamado conjunto de vértices de  $\mathcal{X}$ , y  $E(\mathcal{X})$  es llamado conjunto de aristas de  $\mathcal{X}$ , junto con los mapeos:  $i : E(\mathcal{X}) \rightarrow V(\mathcal{X})$  y  $t : E(\mathcal{X}) \rightarrow V(\mathcal{X})$ . Para una arista  $a \in E(\mathcal{X})$ ,  $i(a)$  se dice vértice inicial de  $a$  y  $t(a)$  se dice vértice terminal de  $a$ . Además, se define  $E^{(2)}(\mathcal{X})$  como el conjunto de todos los pares  $(a, b) \in E(\mathcal{X}) \times E(\mathcal{X})$  tales que  $i(a) = t(b)$ . Junto a un tercer mapeo  $E^{(2)}(\mathcal{X}) \rightarrow E(\mathcal{X})$  que asocia  $(a, b)$  con una arista  $ab$  llamada su composición (donde diremos que  $a$  y  $b$  son componibles). Además estos mapeos deben cumplir:

- Para todo  $(a, b) \in E^{(2)}(\mathcal{X})$ , tenemos que  $i(ab) = i(b)$  y  $t(ab) = t(a)$ .
- Para todo  $a, b, c \in E(\mathcal{X})$  tales que  $i(a) = t(b)$  y  $i(b) = t(c)$ , tenemos que la composición  $(ab)c = a(bc)$ .
- Para todo  $a \in E(\mathcal{X})$  tenemos que  $i(a) \neq t(a)$ .

Esta última definición es bastante abstracta, pero en resumidas cuentas, es casi una Categoría, donde sus Objetos son el conjunto de vértices y sus Morfismos son el conjunto de aristas. Los mapeos permiten establecer el Dominio y Codominio de los morfismos, además de la operación composición de morfismos. Por último, las condiciones que estos deben cumplir permiten la coherencia en los Dominios y Codominios, la Asociatividad de la composición y elimina la flecha identidad, que es la razón por la que no es una Categoría.

De ello, los scwols se relacionan con los Complejos Simpliciales de forma inmediata, por ello tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.11.** (scwol Simplicial asociado a un Complejo Simplicial). Un scwol  $\mathcal{X}$  se puede asociar naturalmente a un Complejo Simplicial  $X$ , vía:

- $V(\mathcal{X})$  es el conjunto  $S(X)$  de Simplicios de  $X$ .
- $E(\mathcal{X}) = \{(\sigma, \sigma') \in V(\mathcal{X})^2 \mid \sigma \subset \sigma'\}$ .
- Para un par  $a = (\sigma, \sigma') \in E(\mathcal{X})$ , diremos que  $i(a) = \sigma$  y  $t(a) = \sigma'$ .
- Para dos ejes componibles  $a = (\sigma, \sigma')$  y  $b = (\sigma', \sigma'')$ , diremos que  $ab = (\sigma, \sigma'')$ .

Luego Diremos que  $\mathcal{X}$  es un scwol Simplicial asociado a  $X$ .

Aquí nuestra intención sería poder desarrollar un Complejo Simplicial  $X$  para nuestro ejemplo. De esta forma, podríamos obtener  $\mathcal{X}$  un scwol Simplicial asociado a  $X$ . De hecho, el interés por poder

relacionar todo esto con los scwols Simpliciales, se concretará con la siguiente definición.

**Definición 1.12.** Sea  $\mathcal{Y}$  un scwol. Un Complejo de Grupos  $G(\mathcal{Y}) = (G_\sigma, \psi_a, g_{a,b})$  sobre  $\mathcal{Y}$ , viene dado por la siguiente información:

- Para cada  $\sigma \in V(\mathcal{Y})$ , un Grupo  $G_\sigma$  llamado grupo local en  $\sigma$ .
- Para cada  $a \in E(\mathcal{Y})$ , un homomorfismo inyectivo  $\psi_a : G_{i(a)} \rightarrow G_{t(a)}$ .
- Para cada par  $(a, b) \in E^{(2)}(\mathcal{Y})$ , un “twisting element”  $g_{a,b} \in G_{t(a)}$ .

Además, tenemos las siguientes condiciones de compatibilidad:

- Para cada par  $(a, b) \in E^{(2)}(\mathcal{Y})$ , tenemos que  $Ad(g_{a,b})\psi_{ab} = \psi_a\psi_b$ .  
Donde  $Ad(g_{a,b}) : g \mapsto g_{a,b} \cdot g \cdot g_{a,b}^{-1}$ .
- Para  $(a, b), (b, c) \in E^{(2)}(\mathcal{Y})$ , se cumple  $\psi_a(g_{b,c}) \cdot g_{a,bc} = g_{a,b} \cdot g_{ab,c}$ .

Hasta aquí se pudo llegar en la Unidad de Investigación. La idea para continuar sería, a partir de nuestro ejemplo, continuar con las condiciones descritas en [Mar13] para desarrollar un Complejo de Grupos de nuestro ejemplo. A partir de dicho Complejo de Grupos, uno puede desarrollar un Complejo de Espacios Clasificantes, en particular, se tiene que gracias a este se puede conseguir un espacio análogo a la Realización de un Complejo de Espacios, que era nuestra meta con la construcción del ejemplo. Por último, esta es la definición de un Complejo de Espacios:

**Definición 1.13.** Un Complejo de Espacios  $C(\mathcal{X})$  sobre un Complejo Simplicial  $X$ , consiste de la siguiente información:

- Para cada Simplex  $\sigma \in X$ , un Espacio Topológico  $C_\sigma$ , llamado *Fibra*,
- Para cada par de Simplexes  $\sigma \subset \sigma'$ , un mapeo continuo  $\phi_{\sigma',\sigma} : C_{\sigma'} \rightarrow C_\sigma$ , llamado *mapeo unidor*, tal que para todo  $\sigma \subset \sigma' \subset \sigma''$ , tenemos  $\phi_{\sigma,\sigma''} = \phi_{\sigma,\sigma'} \circ \phi_{\sigma',\sigma''}$ .

## Referencias

- [Ser02] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [AB08] Peter Abramenko y Kenneth S Brown. *Buildings: theory and applications*. Vol. 248. Springer Science & Business Media, 2008.
- [Mar13] Alexandre Martin. «Topologie et géométrie des complexes de groupes à courbure négative ou nulle». Tesis doct. Université de Strasbourg, 2013.
- [Are14] Luis Arenas-Carmona. «Computing quaternion quotient graphs via representations of orders». En: *Journal of Algebra* 402 (2014), págs. 258-279.
- [AAC18] Manuel Arenas, Luis Arenas-Carmona y Jaime Contreras. «On optimal embeddings and trees». En: *Journal of Number Theory* 193 (2018), págs. 91-117.
- [Are+22] Luis Arenas-Carmona et al. «Quotients of the Bruhat-Tits tree by arithmetic subgroups of special unitary groups». En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 226.8 (2022), pág. 106996.