Ayudantía 4

Matías Saavedra, Catalina Olea, Kevin Guerrero
Profesora: Verónica Poblete
11 de abril de 2024

1. Determine si las siguientes funciones son transformaciones lineales

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (2x - 7z, 0, 3y + 2z)$

   Para comprobar que una función entre K-espacios vectoriales con dominio V es una transformación lineal se puede verificar que para todo $\alpha \in K, x, y \in V$ se cumple que $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$.

   Entonces en nuestro caso consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ entonces $T(\alpha(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)) = T((\alpha x_1+x_2, \alpha y_1+y_2, \alpha z_1+z_2)) = (2(\alpha x_1+x_2)-7(\alpha z_1+z_2), 0, 3(\alpha y_1+y_2)+2(\alpha z_1+z_2)) = (2\alpha x_1+2x_2-7\alpha z_1-7z_2, 0, 3\alpha y_1+3y_2+2\alpha z_1+2z_2) = (2\alpha x_1-7\alpha z_1, 0, 3\alpha y_1+2\alpha z_1)+(2x_2-7z_2, 0, 3y_2+2z_2) = \alpha(2x_1-7z_1, 0, 3y_1+2z_1)+(2x_2-7z_2, 0, 3y_2+2z_2) = \alpha T(x_1, y_1, z_1)+T(x_2, y_2, z_2)$

   Y entonces concluimos que T es una transformación lineal.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x - y, 2y, 1 + x)$

   Notemos que si $T : V \to W$ es una K-transformación lineal entonces $T(0_V) = T(0_K \cdot x) = 0_K \cdot T(x) = 0_W$, para cualquier $x \in V$. Pero en nuestro caso tenemos que $T(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$. Entonces concluimos que en este caso T no es una transformación lineal.

   c) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ viendo a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $T(z) = iIm(z)$

   Notemos que si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, luego $Im(\alpha(a + bi)) = \alpha b = \alpha Im(a + bi)$

   Por otro lado si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ entonces $Im((a + bi) + (c + di)) = Im((a + c) + (b + d)i) = b + d = Im(a + bi) + Im(c + di)$

   Con esto notamos que si $\alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ se tiene que $T(\alpha z) = iIm(\alpha z) = i\alpha Im(z) = \alpha T(z)$. Por otro lado si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces $T(z_1+z_2) = iIm(z_1+z_2) = i(Im(z_1) + Im(z_2)) = iIm(z_1) + iIm(z_2) = T(z_1) + T(z_2)$

   Concluimos que T es una $\mathbb{R}$-tranformación lineal.

   d) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ viendo a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $T(z) = iIm(z)$

   Note que $T(i \cdot i) = T(-1) = iIm(-1) = i \cdot 0 = 0$, por otro lado $iT(i) = i \cdot iIm(i) = i \cdot i \cdot 1 = -1$, luego $T(i \cdot i) \neq iT(i)$ y concluimos que T no es una $\mathbb{C}$-transformación lineal.

2. Probar que existe una única $\mathbb{R}$-transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (-5, 3)$ y $T(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha T encuentre $T(5, 3)$ y $T(-1, 2)$

   Si existiera tal transformación entonces se tendría lo siguiente:

$T(0,1) = \frac{1}{2}T(0,2) = \frac{1}{2}(T(1,1) + T(-1,1)) = \frac{1}{2}((-5,3) + (5,2)) = (0, \frac{5}{2})$

$T(1,0) = \frac{1}{2}T(2,0) = \frac{1}{2}(T(1,1) - T(-1,1)) = \frac{1}{2}((-5,3) - (5,2)) = (-5, \frac{1}{2})$

Luego se tendría que $T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = (-5x, \frac{x}{2}) + (0, \frac{5y}{2}) = (-5x, \frac{x+5y}{2})$

Por lo tanto si existiera la función, la única opción es que sea de esa forma, por lo que tenemos la unicidad, ahora si verificamos que esta última expresión es efectivamente una transformación lineal estaremos listos, esto se hace análogo a como se hizo en el primer ejercicio.

3. ¿Existirá una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (2,6), T(-1,1) = (2,1)$ y $T(2,7) = (5,3)$?

   Primero encontremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(1,1) + \beta(-1,1) = (2,7)$. Resolviendo este sistema se ve que $\alpha = 9/2, \beta = 5/2$.

   Luego si T es una transformación lineal que cumple solo las primeras dos igualdades se tiene que

   $T(2,7) = T(9/2(1,1) + 5/2(-1,1)) = 9/2T(1,1) + 5/2T(-1,1) = 9/2(2,6) + 5/2(2,1) = (14, 59/2)$

   Entonces concluimos que no puede existir transformación lineal que cumpla esas tres igualdades.

4. Demuestre que lo siguiente es una transformación lineal y encuentre $Im(T)$ y $Ker(T)$

$$T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x], T(p(x)) = xp(x) + p'(x)$$

   Primero comprobemos que esto está bien definido, es decir, que si tengo un polinomio en $\mathbb{R}_2[x]$ entonces su imagen está en $\mathbb{R}_3[x]$.

   Sea $p(x)$ con $gr(p(x)) \leq 2$ entonces $gr(xp(x)) \leq 3, gr(p'(x)) \leq 1$, luego $gr(xp(x) + p'(x)) \leq 3$ y entonces la función está bien definida.

   Ahora tomemos $\alpha \in \mathbb{R}, p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces se cumple que

   $T(\alpha p_1(x) + p_2(x)) = x(\alpha p_1(x) + p_2(x)) + (\alpha p_1(x) + p_2(x))' = \alpha x p_1(x) + x p_2(x) + \alpha p_1'(x) + p_2'(x) = \alpha(xp_1(x) + p_1'(x)) + (xp_2(x) + p_2'(x)) = \alpha T(p_1(x)) + T(p_2(x))$

   Y entonces concluimos que T es una transformación lineal.

   Si $p(x) \in Ker(T)$ entonces $T(p(x)) = 0 \implies xp(x) + p'(x) = 0 \implies xp(x) = -p'(x)$

   Pero si $p(x) \neq 0$ entonces $gr(p(x)) = n$ con $n \in \{0,1,2\}$, luego $gr(xp(x)) = n+1$ y $gr(-p'(x)) \leq n$, entonces en este caso como los grados son distintos se concluye que $xp(x) \neq -p'(x)$ y entonces si $p(x) \neq 0$ concluimos que $p(x) \notin Ker(T)$. Como el 0 siempre está concluimos que $Ker(T) = \{0\}$

   Ahora para encontrar una base de la imagen tomemos un polinomio cualquiera de grado menor o igual que 2 y evaluemos en T

   $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = x(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (a_0 + a_1x + a_2x^2)' = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_1 + 2a_2x = a_1(1 + x^2) + a_0x + a_2(2x + x^3)$

Y entonces concluimos que $ImT =< 1+x^2, x, 2x+x^3 >$ esto porque a_0, a_1, a_2 son números reales arbitrarios, luego si vemos la igualdad de arriba de izquierda a derecha concluimos que la imagen de la función está en el generado y si vemos la ecuación de derecha a izquierda concluimos que el generado está en la imagen de la función.

Falta ver y se deja como ejercicio verificar que el conjunto $\{1+x^2, x, 2x+x^3\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$.

5. Sea V un K-espacio vectorial y considere una transformación lineal $T : V \to V$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes

   $i) Im(T) \cap Ker(T) = \{0_V\}$ $\quad ii)$ Si $T(T(v)) = 0_V$ entonces $T(v) = 0_V$

   Supongamos que se cumple $i)$ y probemos la segunda afirmación, entonces sea $v \in V$ tal que $T(T(v)) = 0_V$ entonces $T(v) \in Ker(T)$ pero también por definición $T(v) \in Im(T)$, luego está en la intersección pero sabemos que en la intersección solo está el neutro luego concluimos que $T(v) = 0_V$.

   Ahora supongamos que se cumple $ii)$ y probemos la primera afirmación, entonces sea $w \in Im(T) \cap Ker(T)$, entonces por un lado $w \in Im(T)$, luego existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$, por otro lado $w \in Ker(T)$, luego $T(w) = 0_V \implies T(T(v)) = 0_V$, como se cumple la segunda afirmación concluimos que $T(v) = 0_V \implies w = 0_V$, como w era un elemento arbitrario de la intersección concluimos que $Im(T) \cap Ker(T) = \{0_V\}$ y se demuestra lo buscado.

6. Pruebe que si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal tal que

   $$Ker(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = 5x_2, x_3 = 7x_4\}$$

   entonces T es sobreyectiva.

   Sabemos que $dim\mathbb{R}^2 = 2$ luego encontraremos dos vectores linealmente independientes en la imagen y entonces estos generarán a todo $\mathbb{R}^2$.

   Note que los vectores $(1,0,0,0), (0,0,1,0) \notin Ker(T)$, veremos que $T(1,0,0,0) = (a,b), T(0,0,1,0) = (c,d)$ son linealmente independientes. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que se cumpla $\alpha(a,b) + \beta(c,d) = (0,0) \implies \alpha T(1,0,0,0) + \beta T(0,0,1,0) = (0,0) \implies T(\alpha, 0, \beta, 0) = (0,0) \implies (\alpha, 0, \beta, 0) \in Ker(T)$. Luego se deben cumplir las relaciones que definen a $Ker(T)$, es decir, $\alpha = 5 \cdot 0 = 0$,$\beta = 7 \cdot 0 = 0$, luego podemos concluir que los vectores son linealmente independientes y entonces concluimos que $dimIm(T) \geq dim(< T(1,0,0,0), T(0,0,1,0) >) = 2$, pero por otro lado $Im(T) \subset \mathbb{R}^2$ y este último tiene dimensión igual a 2, luego la dimensión de la imagen tiene que ser menor o igual que 2, juntando estas dos desigualdades concluimos que la dimensión de la imagen es igual a 2. Finalmente como la imagen está contenida en $\mathbb{R}^2$entonces se tiene que $Im(T) = \mathbb{R}^2$ y entonces la función T es sobreyectiva.