



Ayudantía 3

Matías Saavedra, Catalina Olea, Kevin Guerrero

Profesora: Verónica Poblete

8 de abril de 2024

1. Sea $\mathbb{R}^3$ visto como K -espacio vectorial y considere el subespacio vectorial

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$$

Determine la dimensión y una base de $\mathbb{R}^3/S$.

Demostración. Tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3/S &= \{(x, y, z) + S \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x, 0) + (0, y - x, z) + S \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, y - x, z) + S \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, y - x, \frac{1}{2}(y - x)) + (0, 0, z - \frac{1}{2}(y - x)) + S \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 0, z - \frac{1}{2}(y - x)) + S \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, t) + S \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (0, 0, 1) + S \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto una base de $\mathbb{R}^3/S$ es $B = \{(0, 0, 1) + S\}$, concluimos que su dimensión es 1.

□

2. Sea $T : V \longrightarrow W$ una función lineal entre dos K -espacios vectoriales.

- a) Suponga que V es finitamente generado y T epiyectiva. Demuestre que W es finitamente generado. ¿Qué desigualdad hay entre $\dim(V)$ y $\dim(W)$?

Demostración. Sea $\dim_K(V) = n$, por lo tanto existe una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V . Como T es epiyectiva tenemos que para todo $w \in W$ existe un $v \in V$ tal que

$$T(v) = w$$

Ahora bien tenemos que

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = w$$

Como $w \in W$ era arbitrario tenemos que $B' = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ genera a W , como a priori B' no es un conjunto linealmente independiente, tenemos la siguiente desigualdad

$$\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$$

□

- b) Suponga que W es finitamente generado y T inyectiva. Demuestre que V es finitamente generado. ¿Qué desigualdad hay entre $\dim(V)$ y $\dim(W)$?

Demostración. Sea $\dim_K(W)$ finito, como $\text{Im}(T) \leq W$ entonces existe una base $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de $\text{Im}(T)$ con

$$\dim_K(\text{Im}(T)) = m \leq \dim_K(W)$$

Como T es inyectiva para $v \in V$ existe un único $w \in \text{Im}(T)$ tal que $T(v) = w$ en particular tenemos que

$$\begin{aligned} w &= \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_m w_m = \beta_1 T(v_1) + \beta_2 T(v_2) + \dots + \beta_m T(v_m) \\ &= T(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m) = T(v) \end{aligned}$$

Y por inyectividad de T podemos decir

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m = v$$

Como $v \in V$ era arbitrario tenemos que V es finitamente generado, en particular

$$\dim_K(V) = \dim_K(\text{Im}(T))$$

Ya que el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente y genera V , por lo tanto

$$\dim_K(V) \leq \dim_K(W)$$

□

3. Demuestre que la relación entre espacios vectoriales (sobre un K fijo) “es isomorfo a” es una relación de equivalencia.

Demostración. Para demostrar que es relación de equivalencia debemos demostrar las siguientes propiedades:

■ $V \sim V$

Para este caso tomemos $T : V \rightarrow V$ con $T(v) = v$.

■ $V \sim W \implies W \sim V$

Supongamos que $V \sim W$, es decir existe $T : V \rightarrow W$ es una función lineal biyectiva, tenemos que $T^{-1} : W \rightarrow V$ es lineal y biyectiva, por lo tanto $W \sim V$.

■ $V \sim W \wedge W \sim U \implies V \sim U$

Supongamos que $V \sim W$ y $W \sim U$, es decir existen $T : V \rightarrow W$ y $L : W \rightarrow U$ lineales y biyectivas, tenemos que $L \circ T : V \rightarrow U$ es lineal y biyectiva.

□

4. Demuestre que K no es isomorfo a $K \times K$ como K -espacios vectoriales.

Demostración. Supongamos que K es isomorfo a $K \times K$, entonces existe $T : K \rightarrow K \times K$ función lineal biyectiva, como es sobreyectiva existen $x, y, z \in K$ tales que $T(x) = (1, 0)$, $T(y) = (0, 1)$ y $T(z) = (1, 1)$, por otro lado tenemos que

$$(x', y') = x'(1, 0) + y'(0, 1) = x'T(x) + y'T(y) = xT(x') + yT(y')$$

Usando la formula anterior para calcular (x, z) tenemos

$$(x, z) = xT(x) + yT(z) = (x, 0) + (y, y) = (x + y, y)$$

Esto nos genera dos contradicciones, primero $y = z$ pero entonces tiene dos imágenes sobre T (no es función) y segundo $y = 0$ pero como T es función lineal $T(0) = (0, 0) \neq (0, 1)$, por lo tanto no existe tal isomorfismo. □

5. Sean V_1, V_2 K -espacios vectoriales y $f : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_1 + V_2$ la función $f(v_1, v_2) := v_1 + v_2$.

a) Demuestre que f es una función lineal epiyectiva.

Demostración. Primero demostraremos que es una función lineal, sean $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$ y $\alpha \in K$, tenemos que

$$\begin{aligned} f((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) &= f(v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \\ &= (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= f(v_1, v_2) + f(w_1, w_2) \end{aligned}$$

y

$$f(\alpha(v_1, v_2)) = f(\alpha v_1, \alpha v_2) = (\alpha v_1 + \alpha v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha f(v_1, v_2)$$

Por lo tanto es función lineal, ahora sea $x \in V_1 + V_2$ por definición existen $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ y $\alpha, \beta \in K$ tales que

$$x = \alpha v_1 + \beta v_2$$

En particular una preimagen de x es $(\alpha v_1, \beta v_2)$, es decir f es epiyectiva. □

- b) ¿Bajo que condición (sencilla) es f un isomorfismo? Cuando lo sea, escriba su función inversa $f^{-1} : V_1 + V_2 \longrightarrow V_1 \times V_2$.

Demostración. Como ya hemos demostrado que es epiyectiva, solo nos falta probar que es inyectiva, es decir $\text{Ker}(f) = \{0_{V_1+V_2}\}$. Por lo tanto sea

$$f(v_1, v_2) = 0_{V_1+V_2}$$

Esto implica que $v_1 + v_2 = 0$ por lo tanto $v_1 = -v_2$, como los dos son subespacios vectoriales tenemos que

$$v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$$

De esto concluimos que para que f sea inyectiva debemos de tener que $V_1 \cap V_2 = \{0_{V_1+V_2}\}$, y se define la función inversa como

$$\begin{aligned} f^{-1} : V_1 + V_2 &\longrightarrow V_1 \times V_2 \\ x = \alpha v_1 + \beta v_2 &\longmapsto (\alpha v_1, \beta v_2) \end{aligned}$$

□