UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 2

Matías Saavedra, Catalina Olea, Kevin Guerrero
Profesora: Verónica Poblete
1 de abril de 2024

---

1. Sea $K[x]$ (es decir, los polinomios con coeficientes en K) visto como K-espacio vectorial, demuestre que no es finitamente generado.

   Demostración. Supongamos que $K[x]$ es finitamente generado, es decir $dim_K K[x] = n+1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $B = \{1, x, ..., x^n\}$ es base de $K[X]$ (ya que es un conjunto linealmente independiente y $\#(B) = n+1$).

   Sea $x^{n+1} \in K[X]$, como B es base de $K[x]$ existen $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ tales que

   $$x^{n+1} = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$$

   Como dos polinomios son iguales si y solo si todos sus coeficientes son iguales, esto implica que $x^{n+1} = 0$ (contradicción). Por lo tanto $K[x]$ visto K-espacio vectorial no es finitamente generado.

   □

2. Sea $K_n[x]$ (el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n) visto como K-espacio vectorial. Sea $p(x)$ un polinomio cualquiera de $K_n[x]$ y considere

   $$B = \{p(x), p'(x), p''(x), ..., p^{(n)}(x)\}$$

   Analizar si B es o no una base de V, en función de quién sea $p(x)$.

   Demostración. Primero notemos que $dim_K K_n[x] = n+1$, ya que $B' = \{1, x, ..., x^n\}$ es base del espacio. Por lo tanto solo debemos probar que los elementos de B son linealmente independientes. Sea $p(x) \in K_n[x]$ tal que

   $$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \quad \text{con } \alpha_i \in K \text{ y } \alpha_n \neq 0$$

   La ultima restricción se debe a que necesitamos que $p(x)$ al derivarlo n veces sea distinto del polinomio 0 (ya que es linealmente dependiente). Por lo que sea

   $$\beta_0 p(x) + \beta_1 p'(x) + ... + \beta_n p^{(n)}(x) = 0$$

   Tenemos que demostrar que $\beta_i = 0_K$ para todo $0 \leq i \leq n$, en particular

   $$\beta_0 \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i x^{i-1} + ... + \beta_n (n!\alpha_n) = 0$$

   Notemos que en la expresión anterior el coeficiente de x^n es $\beta_0 \alpha_n$, como $\alpha_n \neq 0$ entonces $\beta_0 = 0$. Luego para cada coeficiente de x^i se realiza el mismo razonamiento, por lo tanto se tiene que $\beta_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$.

   □

3. Demostrar que si U, V y W son subespacios vectoriales de un cierto espacio, entonces:

   a) $(U \cap V) + (U \cap W) \subseteq U \cap (V + W)$

   b) $U + (V \cap W) \subseteq (U + V) \cap (U + W)$

   Demostración.(a) Sea $x \in (U \cap V) + (U \cap W)$, por lo que existen $y_1 \in U \cap V$, $y_2 \in U \cap W$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tales que

$$x = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

   Como $y_1, y_2 \in U$ esto implica que $x \in U$, ahora falta probar que $x \in V + W$. Pero $y_1 \in V$ y $y_2 \in W$ entonces $x \in V + W$.

   (b) Sea $x \in U + (V \cap W)$, por lo que existen $y_1 \in U$, $y_2 \in V \cap W$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tales que

$$x = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

   Como $y_1 \in U$ y $y_2 \in V$ entonces $x \in U + V$, de la misma manera tenemos que $y_1 \in U$ y $y_2 \in W$ entonces $x \in U + W$.

$\square$

4. Sea V el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y considere los conjuntos:

$$U_1 = \{f \in V \mid f(1) = f(-1) = 0\}$$
$$U_2 = \{f \in V | f(x) = ax + b \text{ para ciertos } a, b \in \mathbb{R}\}$$

   Demostrar que $U_1 \oplus U_2 = V$.

   Demostración. Primero demostremos que $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$, supongamos que existe $f \neq 0_V \in U_1 \cap U_2$ por lo tanto

$$f(x) = ax + b \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R} \text{ fijos}$$

   Como $f \in U_1$ entonces

$$f(1) = a + b = 0 \quad \wedge \quad f(-1) = -a + b = 0$$

   Por lo que

$$b = a = -a \quad \Longrightarrow \quad b = a = 0 \quad (\Longrightarrow\Longleftarrow)$$

   De modo que $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$.

   Ahora bien sea $\phi \in V$ tenemos que se puede escribir de la forma

$$\phi(x) = (a + bx) + f(x)$$

   donde

$$a = \frac{1}{2}[\phi(1) + \phi(-1)] \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2}[\phi(1) - \phi(-1)]$$

   De modo que se comprueba que $f(x) = \phi(x) - (ax + b)$ es tal que $f(1) = f(-1) = 0$.

$\square$

5. Sean U_1 y U_2 los siguientes subespacios del espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$:

$$U_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$$
$$U_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 = x_2 = ... = x_n\}$$

Demostrar que $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^n$.

Demostración. Primero demostraremos que $U_1 \cap U_2 = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, supongamos que existe $x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n$ por lo tanto

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \quad \wedge \quad x_1 = x_2 = ... = x_n$$

Esto implica que $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ ($\Longrightarrow\Longleftarrow$), por lo tanto $U_1 \cap U_2 = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Ahora bien sea $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ tenemos que se puede escribir de la forma

$$(y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) + (t, t, ..., t)$$

con

$$t = \frac{1}{n}[y_1 + y_2 + ... + y_n] \quad \wedge \quad x_i = y_i - t \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

$\square$