Ayudantía 1

Matías Saavedra, Catalina Olea, Kevin Guerrero
Profesora: Verónica Poblete
25 de marzo de 2024

UNIVERSIDAD DE CHILE

---

1. Sea V un K-espacio vectorial con K cuerpo, demuestre las siguientes propiedades:
   a) El inverso aditivo de cada $v \in V$ es único.
   b) $(-1_K) \cdot v$ es el inverso aditivo de $v \in V$, donde -1_K denota el inverso aditivo del neutro para la multiplicación de K.
   c) Sean $\alpha \in K$ y $v \in V$, demuestre que $\alpha \cdot v = 0_V$ ssi $\alpha = 0_K$ (el neutro para la suma K), o $v = 0_V$.
   d) Sean $\alpha, \beta \in K$ y $v \in V$, demuestre que $\alpha \cdot v = \beta \cdot v$ ssi $\alpha = \beta$ o $v = 0_V$.
   e) Sean $v_1, v_2, v \in V$, demuestre que $v + v_1 = v + v_2$ ssi $v_1 = v_2$. Es decir, hay cancelación en V.

2. Sea V un K-espacio vectorial, demostrar las siguientes propiedades:
   a) Si V_1, V_2 son subespacios vectoriales de V, entonces la intersección $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de V.
   b) Si V_1, V_2 son subespacios vectoriales de V, entonces
   $$V_1 + V_2 := \{v \in V \mid \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \alpha_1, \alpha_2 \in K \text{ tales que } v = \alpha v_1 + \alpha_2 v_2\}$$
   es un subespacio vectorial de V.
   c) Si V_1, V_2 son subespacios vectoriales de V, demostrar que $V_1 \cup V_2$ es un subespacio vectorial de V ssi $V_1 \subseteq V_2$ o $V_2 \subseteq V_1$.

3. Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales (con el mismo cuerpo de escalares) y considere el producto cartesiano $V_1 \times V_2$, en el que se define la suma y el producto escalar mediante:
   $$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$$
   $$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$
   Pruebe que con estas operaciones el conjunto $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial. Si V_1 y V_2 tienen dimensión finita, compruebe que:
   $$dim(V_1 \times V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$$

4. Considere el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ el sistema formado por las matrices:
   $$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar las coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ en la base S de una matriz genérica M de V:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

b) Comprobar que S es una base de V.