Matemáticas III
Álgebra Lineal y Cálculo Vectorial

Sergio Muñoz

F. Ciencias, UChile

09 mayo 2024

Clase 09 mayo

Objetivos

1. Núcleo e Imagen de funciones lineales
2. Ejemplo de función lineal
3. Ejercicios de función lineal
4. SEL y transformaciones lineales
5. Propiedades de transformaciones lineales

Núcleo e Imagen de funciones lineales

Definiciones y propiedades

Dados U, V e.v. ambos sobre un cuerpo de escalares K y $T : U \to V$ una transformación lineal (t.l.). Definimos:

- **Kernel** (o núcleo) de T como $\ker(T) = \left\{ \vec{u} \in U \mid T(\vec{u}) = \vec{0}_V \right\}$

Núcleo e Imagen de funciones lineales

Definiciones y propiedades

Dados U, V e.v. ambos sobre un cuerpo de escalares K y $T : U \to V$ una transformación lineal (t.l.). Definimos:

- **Kernel** (o núcleo) de T como $\ker(T) = \left\{ \vec{u} \in U \mid T(\vec{u}) = \vec{0}_V \right\}$
- **Imagen** de T como $Im(T) = \left\{ T(\vec{u}) \in V \mid \vec{u} \in U \right\}$

Núcleo e Imagen de funciones lineales

Definiciones y propiedades

Dados U, V e.v. ambos sobre un cuerpo de escalares K y $T : U \to V$ una transformación lineal (t.l.). Definimos:

- **Kernel** (o núcleo) de T como $\ker(T) = \left\{ \vec{u} \in U \mid T(\vec{u}) = \vec{0}_V \right\}$
- **Imagen** de T como $Im(T) = \left\{ T(\vec{u}) \in V \mid \vec{u} \in U \right\}$
- $\ker(T)$ e $Im(T)$ son subespacios vectoriales de U y V resp.

Núcleo e Imagen de funciones lineales

Definiciones y propiedades

Dados U, V e.v. ambos sobre un cuerpo de escalares K y $T : U \to V$ una transformación lineal (t.l.). Definimos:

- **Kernel** (o núcleo) de T como $\ker(T) = \left\{\vec{u} \in U \mid T(\vec{u}) = \vec{0}_V\right\}$
- **Imagen** de T como $Im(T) = \left\{T(\vec{u}) \in V \mid \vec{u} \in U\right\}$
- $\ker(T)$ e $Im(T)$ son subespacios vectoriales de U y V resp.
- (No Prueba 2):
  Teorema de las dimensiones: Si $T : U \to V$ es t.l., entonces $\dim(U) = \dim(\ker(T)) + \dim(Im(T))$

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ dos escalares y $(a, b, c), (a', b', c')$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ dos escalares y $(a, b, c), (a', b', c')$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
& T\left(p \cdot (a, b, c) + q \cdot (a', b', c')\right) \\
&= T(\underbrace{p \cdot a + q \cdot a'}_{"x"}, \underbrace{p \cdot b + q \cdot b'}_{"y"}, \underbrace{p \cdot c + q \cdot c'}_{"z"})
\end{aligned}
$$

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ dos escalares y $(a, b, c), (a', b', c')$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
&T\left(p \cdot (a, b, c) + q \cdot (a', b', c')\right) \\
&= T(\underbrace{p \cdot a + q \cdot a'}_{"x"}, \underbrace{p \cdot b + q \cdot b'}_{"y"}, \underbrace{p \cdot c + q \cdot c'}_{"z"}) \\
&= ((p \cdot a + q \cdot a') - (p \cdot b + q \cdot b') + (p \cdot c + q \cdot c'), \\
&\qquad 2 \cdot (p \cdot a + q \cdot a') + (p \cdot b + q \cdot b') - (p \cdot c + q \cdot c'))
\end{aligned}
$$

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ dos escalares y $(a, b, c), (a', b', c')$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
& T\left(p \cdot (a, b, c) + q \cdot (a', b', c')\right) \\
& = ((p \cdot a + q \cdot a') - (p \cdot b + q \cdot b') + (p \cdot c + q \cdot c'), \\
& \qquad\qquad 2 \cdot (p \cdot a + q \cdot a') + (p \cdot b + q \cdot b') - (p \cdot c + q \cdot c')) \\
& = p \cdot (a - b + c,\ 2a + b - c) + q \cdot (a' - b' + c',\ 2a' + b' - c')
\end{aligned}
$$

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ dos escalares y $(a, b, c), (a', b', c')$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
&T\left(p \cdot (a, b, c) + q \cdot (a', b', c')\right) \\
&= p \cdot (a - b + c,\ 2a + b - c) + q \cdot (a' - b' + c',\ 2a' + b' - c') \\
&= p \cdot T(a, b, c) + q \cdot T(a', b', c')
\end{aligned}
$$

Luego, T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.

2.

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. ✓ T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.
2. El Núcleo de T, $\ker(T)$, es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0)\}$$

3.

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\, 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. ✓ T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.
2. El Núcleo de T, $\ker(T)$, es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0)\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y + z,\, 2x + y - z) = (0, 0)\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 2x + y - z & = 0 \end{cases}\right\}
\end{aligned}$$

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x,y,z) = (x - y + z,\, 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. ✓ T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.
2. El Núcleo de T, $\ker(T)$, es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\ker(t) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 2x + y - z & = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x & = 0 \\ y & = z \end{cases} \right\}$$

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y - z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. ✓ T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.
2. El Núcleo de T, $\ker(T)$, es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\begin{aligned}\ker(T) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x &= 0 \\ y &= z \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (0, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{gen}(\{(0, 1, 1)\})\end{aligned}$$

por lo que $\ker(T) = \mathrm{gen}(\{(0, 1, 1)\})$ y su dimensión es 1

Ejemplo de función lineal

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x+y-z)$

1. Justifique que T es un transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
2. Obtenga Núcleo de T
3. (No Prueba 2): Determine dimensión de Imagen de T

Respuesta

1. ✓ T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.
2. ✓ $\ker(T) = \text{gen}(\{(0,1,1)\})$ y su dimensión es 1
3. (No Prueba 2):
   Por Teorema de las dimensiones,
   $\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(T)) = 3 - 1 = 2$ es decir, el subespacio Imagen de T tiene dimensión 2.

Ejercicios de función lineal I

Los ejercicios marcados con asterisco $(*)$ se harán en ayudantía.

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y & x+z \\ y+z & 2x+3y+2z \end{pmatrix}$$

   1. Demuestre que T es transformación lineal.
   2. Determine una base del Kernel de T.

2. Demuestre que T es transformación lineal y determine una base del Kernel de T.
   1. $(*)$ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
   2. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ donde $T(\vec{u}) = (0, \dots, 0)$ para todo $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$.
   3. $(*)$ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde $T(x, y) = (x + y, x - y - 1)$.
   4. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $T(x, y) = 2x + 4y$.

Ejercicios de función lineal II

5. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$.
6. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x - z)$.
7. $(*)$ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde $T(x, y) = (x + 3y, y - 3x, 4x + 3y)$.
8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
9. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y + 2, x - 3y)$.
10. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y$.
11. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x + y - 1$.
12. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0, y)$.
13. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0, 0)$.
14. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (1, x)$.
15. $(*)$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0, y)$.
16. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, x + z, z + y + xy)$.
17. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, x + z, z + y + x)$.

Ejercicios de función lineal III

3. Suponga que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una función lineal y que $f\begin{pmatrix}1, & 0 & ,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13, & 4\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}2, & 1, & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16, & 3\end{pmatrix}$. ¿Puede calcular $f\begin{pmatrix}4, & -3, & 7\end{pmatrix}$?
4. Determine en cada caso, si existe, o no alguna función lineal, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
   1. $(*)$ $T(1,2,1) = (0,0,1)$, $T(2,0,0) = (1,1,1)$ y $T(4,4,2) = (2,2,2)$
   2. $T(1,0,-1) = (10,5,0)$, $T(0,0,3) = (3,-1,1)$ y $T(4,4,2) = (2,2,2)$
   3. $T(1,1,1) = (0,0,1)$, $T(1,0,1) = (0,0,1)$ y $T(1,2,1) = (0,0,1)$
   4. $(*)$ $T(1,1,1) = (0,0,1)$, $T(1,0,1) = (0,0,1)$ y $T(1,2,1) = (0,0,0)$
   5. $T(1,0,0) = (1,2,1)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$ y $T(1,1,0) = (1,1,1)$

SEL y transformaciones lineales

Propiedad

Sea $AX = B$ un SEL. de n ecuaciones y m incógnitas, con A de n$\times m$, X de $m \times 1$ y B de $n \times 1$. Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $T(X) = AX$. Se cumplen

- Si $B = (0)$ entonces $\{X \in \mathbb{R}^m \ : \ AX = (0)\} = \ker(T)$

SEL y transformaciones lineales

Propiedad

Sea $AX = B$ un SEL. de n ecuaciones y m incógnitas, con A de n$\times m$, X de $m \times 1$ y B de $n \times 1$. Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $T(X) = AX$. Se cumplen

- Si $B = (0)$ entonces $\{X \in \mathbb{R}^m \; : \; AX = (0)\} = \ker(T)$
- Si $B \neq (0)$, entonces $AX = B$ tiene solución ssi $B \in Im(T)$

SEL y transformaciones lineales

Propiedad

Sea $AX = B$ un SEL. de n ecuaciones y m incógnitas, con A de n$\times m$, X de $m \times 1$ y B de $n \times 1$. Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $T(X) = AX$. Se cumplen

- Si $B = (0)$ entonces $\{X \in \mathbb{R}^m \ : \ AX = (0)\} = \ker(T)$
- Si $B \neq (0)$, entonces $AX = B$ tiene solución ssi $B \in Im(T)$
- $Im(T) = \text{gen}(\{C_1, C_2, \cdots, C_m\})$ donde C_i es la i-ésima columna de A

SEL y transformaciones lineales

Propiedad

Sea $AX = B$ un SEL. de n ecuaciones y m incógnitas, con A de n$\times m$, X de $m \times 1$ y B de $n \times 1$. Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $T(X) = AX$. Se cumplen

- Si $B = (0)$ entonces $\{X \in \mathbb{R}^m \ : \ AX = (0)\} = \ker(T)$
- Si $B \neq (0)$, entonces $AX = B$ tiene solución ssi $B \in Im(T)$
- $Im(T) = \text{gen}(\{C_1, C_2, \cdots, C_m\})$ donde C_i es la i-ésima columna de A
- Si $B \in Im(T)$ y $\vec{p} \in \mathbb{R}^m$ cumple $A\vec{p} = B$, entonces $\{X \in \mathbb{R}^m \ : \ AX = B\} = \{\vec{p} + \vec{h} \ : \ \vec{h} \in \ker(T)\} = \vec{p} + \ker(T)$

Ejemplo

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución del SEL $\begin{cases} x + y + z & = 6 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot y + z & = 0 \\ 3 \cdot x - 2 \cdot y + 2 \cdot z & = 6 \\ \quad x - 4 \cdot y & = -6 \end{cases}$.

Ejemplo

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es solución del SEL } \begin{cases} x + y + z & = 6 \\ 2\cdot x - 3\cdot y + z & = 0 \\ 3\cdot x - 2\cdot y + 2\cdot z & = 6 \\ \qquad x - 4\cdot y & = -6 \end{cases}.$$

$$\text{La solución del SEL es } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; p \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución del SEL $\begin{cases} x + y + z & = 6 \\ 2\cdot x - 3\cdot y + z & = 0 \\ 3\cdot x - 2\cdot y + 2\cdot z & = 6 \\ \quad x - 4\cdot y & = -6 \end{cases}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ejemplo

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución del SEL $\begin{cases} x + y + z & = 6 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot y + z & = 0 \\ 3 \cdot x - 2 \cdot y + 2 \cdot z & = 6 \\ x - 4 \cdot y & = -6 \end{cases}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Luego $T(\vec{p}) = B$ y $\ker(T) = \text{gen} \left(\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$

Ejemplo

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución del SEL $\begin{cases} x + y + z & = 6 \\ 2\cdot x - 3\cdot y + z & = 0 \\ 3\cdot x - 2\cdot y + 2\cdot z & = 6 \\ \qquad x - 4\cdot y & = -6 \end{cases}$.

Luego $T(\vec{p}) = B$ y $\ker(T) = \text{gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$

Y solución del SEL es $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ z \in \mathbb{R}\right\} = \vec{p} + \ker(T)$

Propiedades de transformaciones lineales

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. con U y V e.v. de dimensión finita sobre K, Se cumplen:

- Si A es una base de U entonces $Im(T) = \text{gen}(\{T(\vec{v}) : \vec{v} \in A\})$

Propiedades de transformaciones lineales

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. con U y V e.v. de dimensión finita sobre K, Se cumplen:

- Si A es una base de U entonces $Im(T) = \text{gen}(\{T(\vec{v}) : \vec{v} \in A\})$
- Para cada vector $\vec{v} \in Im(T)$ se cumple que $\{\vec{u} \in U \mid T(\vec{u}) = \vec{v}\} = \vec{u}_0 + \ker(T)$ donde $\vec{u}_0$ es un vector particular que cumple $T(\vec{u}_0) = \vec{v}$

Ejemplo

Cuando se tiene $\int 3 \cdot x^2 \ dx = x^3 + C, \ C \in \mathbb{R}$ se está aplicando el mismo proceso previo, ya que si T es la transformación lineal "derivada", se cumpe $T\left(x^3\right) = 3 \cdot x^2$ y $\ker(T) = \{C \mid C \in \mathbb{R}\}$ (las funciones constantes son las que tienen derivada nula)

Ejemplo

Cuando se tiene $\int 3 \cdot x^2 \, dx = x^3 + C, \ C \in \mathbb{R}$ se está aplicando el mismo proceso previo, ya que si T es la transformación lineal "derivada", se cumpe $T\left(x^3\right) = 3 \cdot x^2$ y $\ker(T) = \{C \mid C \in \mathbb{R}\}$ (las funciones constantes son las que tienen derivada nula)

En ese sentido, $\int 3 \cdot x^2 \, dx = x^3 + C, \ C \in \mathbb{R}$ se reescribiría como $\left\{f(x) \mid T(f(x)) = 3 \cdot x^2\right\} = x^3 + \ker(T)$