Ayudantía 6
Cálculo en Varias Variables
Lic. Matemáticas y Lic. Física
Primer Semestre 2024
Profesor: Álvaro Castañeda G.
Ayudantes: Andres Vásquez De Gracia y Stevan Cebrian

1) Sea g : $R^2 \to R$ una función diferenciable. Suponga que eexiste $(u, v) \in R^2$ tal que

$$g(u, v) \leq g(x, y) \ \forall (x, y) \in R^2$$

. Demuestre que $\nabla g(u, v) = (0, 0)$.

2) Sean $\beta > 1$, $k > 0$ y F : $R^2 \to R^2$ una función tal que

$$||F(\vec{x}) - F(\vec{y})|| \leq k||\vec{x} - \vec{y}||^\beta \ \forall x, y \in R^2$$

a) Demuestre que F es continua en todo R^2.
b) Demuestre que F es constante (HINT: use las derivadas parciales).
c) Que pasa para el caso $\beta = 1$?.

3) Sea $f : R^2 \to R$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{3x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Demuestre que sus derivadas parciales en (x,y)=(0,0) son nulas.
b) Demuestre que

$$< \nabla f(x, y), (x, y) >= f(x, y)$$

.

c) demuestre que f no es diferenciable en (x,y)=(0,0).

4) Sea z=g(x,y) con $g : R^2 \to R$ derivable y $x := e^r cos(\theta)$ e $y := e^r sen(\theta)$. Demuestre que

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = e^{-2r}[(\frac{\partial z}{\partial r})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \theta})^2].$$

5) Sean g,h: $R^2 \to R$, definidas por

$$g(x, y) = e^x cos(y), \text{ y } h(x) = e^x sen(y)$$

Si consideramos coordenadas polares $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$ pruebe que

$$r\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial \theta} \text{ ,y } r\frac{\partial h(r, \theta)}{\partial r} = -\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta}.$$