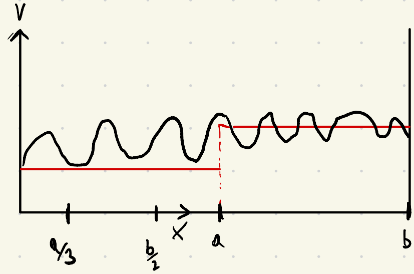
Considere una partícula que se mueve en un pozo potencial de largo $L = a + b$, en el punto a, el pozo tiene una separación que define un potencial desde 0 a a y de a a b, lo cual produce que la función de onda esté separada en dos partes.

$$\psi(x,0) = \begin{cases} A\sin(kx) & \text{Si } 0 < x < a \\ A\frac{\sin(ka)}{\sin(b-a)}\sin(k(b-x)) & \text{Si } a < x < b \end{cases}$$

Con k una constante conocida.

- Determine el valor de A tal que la función esté normalizada.
- Encuentre la probabilidad de encontrar la partícula en $[0, a]$.
- Encuentre la probabilidad de encontrar la partícula en $[a, b]$.
- Encuentre la probabilidad de encontrar la partícula en $[a/3, b/2]$.



$$\check{\mathcal{H}} = T + V$$

$$T = \frac{\check{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$$

$$\check{\mathcal{H}}\psi = i\hbar\frac{d}{dt}\psi$$

a) $$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi\,dx$$

Asumiendo que fuera del potencial $\psi = 0$

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \int_0^b \psi^*\psi\,dx = \int_0^a A\,\text{Sen}(Kx)\,A\,\text{Sen}(Kx)\,dx + \int_a^b A^2\frac{\text{Sen}(Ka)^2}{\text{Sen}(b-a)^2}\text{Sen}^2(K(b-x))\,dx$$

La primera integral

$$\int_0^a A^2\,\text{Sen}^2(Kx)\,dx = A^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\text{Sen}(2Kx)}{4K}\right)\Big|_0^a$$

$$= A^2\left(\frac{a-0}{2} - \frac{\text{Sen}(2Ka)}{4K} + \cancel{\frac{\text{Sen}(2K0)}{4K}}^{\,0}\right)$$

$$= A^2\left[\frac{a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2Ka)}{4K}\right]$$

La segunda integral

$$\int_a^b A^2\left(\frac{\mathrm{Sen}(Ka)}{\mathrm{Sen}(b-a)}\right)^2 \mathrm{Sen}^2(K(b-X))\,dX = A^2\left(\frac{\mathrm{Sen}(Ka)}{\mathrm{Sen}(b-a)}\right)^2 \int_a^b \mathrm{Sen}^2(K(b-X))\,dX$$

La integral:

$$U = b - X$$
$$dU = -dX$$

$$\int_a^b \mathrm{Sen}^2(K(b-X))\,dX = \int \mathrm{Sen}^2(KU)(-dU) = -\left(\frac{U}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2KU)}{4K}\right)\Bigg|_{X_1}^{X_2}$$

$$= \left(\frac{b-X}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2K(b-X))}{4K}\right)\Bigg|_b^a$$

$$= \left[\frac{b-a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2K(b-a))}{4K}\right]$$

Reuniendo los resultados

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = A^2\left[\frac{a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2Ka)}{4K}\right] + A^2\left(\frac{\mathrm{Sen}(Ka)}{\mathrm{Sen}(b-a)}\right)^2\left[\frac{b-a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2K(b-a))}{4K}\right]$$

$$= A^2\left[\left[\frac{a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2Ka)}{4K}\right] + \left(\frac{\mathrm{Sen}(Ka)}{\mathrm{Sen}(b-a)}\right)^2\left[\frac{b-a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2K(b-a))}{4K}\right]\right]$$

Entonces

$$A = \left[\left[\frac{a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2Ka)}{4K}\right] + \left(\frac{\mathrm{Sen}(Ka)}{\mathrm{Sen}(b-a)}\right)^2\left[\frac{b-a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2K(b-a))}{4K}\right]\right]^{-1/2}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

Para encontrar la probabilidad de hallar la partícula en un intervalo arbitrario $[x_i, x_f]$, se debe integrar

$$P_{x_i}^{x_f}(\psi) = \int_{x_i}^{x_f} \psi^* \psi \, dx$$

Para el tercer tramo

$$P_{x_i}^{x_f}(\psi) = \int_{x_i}^{x_f} \psi^* \psi \, dx$$

$$= \int_{x_i}^{a} \psi^2 \, dx + \int_{a}^{x_f} \psi^2 \, dx$$

$$= \int_{a/3}^{a} \psi^2 \, dx + \int_{a}^{b/2} \psi^2 \, dx$$

Por parte

$$\int_{a/3}^{a} A^2 \operatorname{Sen}^2(kx) \, dx = A^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{Sen}(2kx)}{4k} \right|_{a/3}^{a}$$

$$= A^2 \left(\frac{2a}{3 \cdot 2} - \frac{\operatorname{Sen}(2ka) - \operatorname{Sen}\left(\frac{2ka}{3}\right)}{4k} \right)$$

$$\int_{a}^{b/2} A^2 \left[\frac{\operatorname{Sen}(ka)}{\operatorname{Sen}(b-a)} \right]^2 \operatorname{Sen}^2(k(b-x)) \, dx = A^2 \left[\frac{\operatorname{Sen}(ka)}{\operatorname{Sen}(b-a)} \right]^2 \left(\frac{b-x}{2} - \frac{\operatorname{Sen}(2k(b-x))}{4k} \right|_{b/2}^{a}$$

$$\left(\frac{b-x}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2K(b-x))}{4K}\right|_{b/2}^{a} = \frac{b-(a-b/2)}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2K(b-a)) - \mathrm{Sen}(2K(b-b/2))}{4K}$$

$$\left[\frac{b}{4} - \frac{a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(K(b-a)) - \mathrm{Sen}(Kb)}{4K}\right]$$

Reuniendo todo

$$P_{a/3}^{b/2}(\psi) = \frac{\left(\frac{a}{3} - \frac{\mathrm{Sen}(2Ka) - \mathrm{Sen}\left(\frac{2Ka}{3}\right)}{4K}\right) + \left[\frac{\mathrm{Sen}(Ka)}{\mathrm{Sen}(b-a)}\right]^2 \left[\frac{b-2a}{4} - \frac{\mathrm{Sen}(K(b-a)) - \mathrm{Sen}(Kb)}{4K}\right]}{\left[\left[\frac{a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2Ka)}{4K}\right] + \left(\frac{\mathrm{Sen}(Ka)}{\mathrm{Sen}(b-a)}\right)^2 \left[\frac{b-a}{2} - \frac{\mathrm{Sen}(2K(b-a))}{4K}\right]\right]}$$

Una gota de agua (aproximadamente como una esfera de radio $r = 2 \cdot 10^{-6}[m]$) se deja caer desde una altura de $3cm$ hacia una superficie sobre un punto en específico, suponiendo que desde esa altura la gota no alcanza a deformarse y se mantiene uniforme, estime la limitación establecida por el principio de incertidumbre a la precisión que se puede alcanzar. Para ello, determine el valor de x_{min}, luego encuentre el mínimo de energía $E(\Delta x_{min})$.

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

En el mejor de los casos

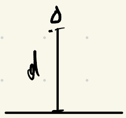
$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

$$p = mv$$

$$\Delta p = m \Delta v = m \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$m = \rho \cdot V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$\Delta t =$ el tiempo de caída $= \sqrt{2d/g}$



$$\Delta p = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{\Delta x}{\sqrt{2d/g}}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{\Delta x}{\sqrt{2d/g}} \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x^2 = \frac{\hbar \sqrt{2d} \cdot 3}{2 \cdot 4\pi r^3 \rho \sqrt{g}} =$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{3\hbar}{8\pi r^3 \rho}\sqrt{\frac{2d}{g}}} = 1.109 \cdot 10^{-11}\ [m]$$

$$= 0.11\ [Å]$$

r de $H_1 \approx 0.5\ [Å]$

$$E(\Delta x_{min}) = T + \cancel{V}^{0}$$

$$= \frac{1}{2} m \Delta v^2 = \frac{1}{2} m \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} = \frac{2\pi r^3 \rho g}{3d} \Delta x^2$$

$$= 3.31 \cdot 10^{-34}\ [J]$$

$$= 2.066 \cdot 10^{-15}\ [eV]$$

Considere el paquete de ondas Gaussiano, dado por

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k,0) e^{ikx} dk$$
$$\phi(k,0) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-a(k-k_0)^2}$$

Si consideramos la relación de dispersión de una partícula libre, podemos resolver el problema tiempo dependiente dado por

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k,t) e^{ikx} dk$$

con

$$\phi(k,t) = \phi(k,0) e^{-iw(k)t}$$

- Determine el valor $\psi(x,t)$.
- La varianza σ en una función Gaussiana aparece de la forma $f(v) = Ae^{-\frac{(v-v_0)^2}{2\sigma^2}}$. Encuentre σ_x y σ_k

En general

$$\psi(x) \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftarrows}} \psi(p) \qquad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

La rel. de disp. de la partícula libre

$$\omega = \frac{k^2\hbar}{2m}$$

$$\phi(k,t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-a(k-k_0)^2} e^{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t}$$

$$\psi(x,t) = \mathcal{F}(\phi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-a(k-k_0)^2} e^{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t} e^{ikx} dk$$

$$\psi(x,t) \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(k-k_0)^2} e^{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t} e^{ikx} dk$$

$$-a(k-k_0)^2 - \frac{ik^2\hbar}{2m}t + ikx \qquad \int e^{-u^2}du$$

$$-ak^2 + 2akk_0 - ak_0^2 - \frac{ik^2\hbar}{2m}t + ikx$$

$$-\left(k^2\left(a + \frac{i\hbar t}{2m}\right) + k(-2ak_0 - ix) + ak_0^2\right)$$

$$-\left(k^2\alpha + k\beta + ak_0^2\right)$$

$$(k+\gamma)^2 \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = k^2\alpha + k\beta$$

$$a^2 = k^2\alpha \Rightarrow a = k\sqrt{\alpha}$$

$$2ab = k\beta \Rightarrow 2k\sqrt{\alpha}\cdot b = k\beta$$

$$\Rightarrow b = \frac{k\beta}{2k\sqrt{\alpha}} = b = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$-\left(k^2\alpha + k\beta + \frac{\beta^2}{4\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$-\left(k\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-ak_0^2} \int e^{-\left(k\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)} \cdot e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\, dk$$

$$U = \left(k\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-ak_0^2} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int e^{-\left(k\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dk \qquad dU = dk\sqrt{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-ak_0^2} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-U^2} \frac{dU}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\cancel{\pi}}}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-ak_0^2} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-ak_0^2} e^{\frac{(2ak_0+ix)^2}{4\left(a+\frac{i\hbar t}{2m}\right)}}$$

- Dada la forma de $\psi(x,t)$, $2\sigma_x^2 = 4\overset{\alpha}{\left(a+\frac{i\hbar t}{2m}\right)}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_x = \sqrt{2\left(a+\frac{i\hbar}{2m}t\right)}$$

$$\sigma_x = (2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(k,t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-a(k-k_0)^2} e^{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t}$$

$$-a(k-k_0)^2 - i\frac{k^2\hbar}{2m}t$$

$$-ak^2 + 2akk_0 - ak_0^2 - i\frac{k^2\hbar}{2m}t$$

$$-\left(k^2\left(a+\frac{i\hbar t}{2m}\right) + k(-2ak_0) + ak_0^2\right)$$

$$\alpha = \left(a+\frac{i\hbar t}{2m}\right) \quad \beta = (-2ak_0)$$

$$-\left(k^2\alpha + k\beta + ak_0^2\right)$$

$$-\left(k\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha} + ak_0^2$$

$$\phi(k,t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\left(k\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{a}}\right)^2} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} + ak_0^2}$$

$$\left(\sqrt{\alpha}\left(k + \frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)^2 = \alpha\left(k + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

$$2\sigma_k^2 = \frac{1}{\alpha} =$$

$$\sigma_k = (2\alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

Entonces

$$\sigma_x = \left(2\left(a + \frac{i\hbar}{2m}t\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_k = \left(2\left(a + \frac{i\hbar}{2m}t\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Notaciones

función de onda : "Ket" $|\psi\rangle = \psi(x, t, a, b\ldots)$

"bra" $\langle\psi| = \psi^{+}$ ← daga

↖ traspuesto y conjugado

$|l,m\rangle = Y_{lm} = A_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$

En el átomo de hidrogeno

$$|\psi_{lm}\rangle = \sum_{l,m} C_{lm} \cdot Y_{lm} = \sum_{lm} C_{lm} |l,m\rangle$$

$\langle l,m| = A_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{-im\phi}$

Conjugar $(a+ib) \rightsquigarrow (a-ib)$

Trasponer $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to (a\ b\ c)$

$(a) \to (a)$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} Y_{lm} Y_{l'm'}^{*} \, d(\cos\theta) = A_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\langle l'm'|l,m\rangle = A_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle$$

$$\langle n'|n\rangle = \int J^{*}(k\rho)\, J(k\rho)\, d\rho$$

$$|\psi\rangle = \sum A\hat{x} + B\hat{y} + C\hat{z} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi'|\psi\rangle = (A'\ B'\ C')\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = A'A + B'B + C'C$$

Operadores (mediciones de magnitudes físicas)

$$\check{X} = \hat{X}$$

$\langle \psi | \check{X} | \psi \rangle$ = Valor esperado de X

$\langle \psi | \check{P} | \psi \rangle$: cuanto vale el momento