# Ayudantía

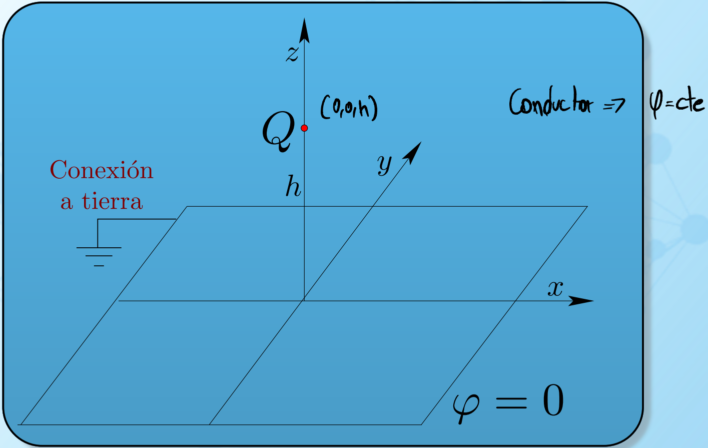
## Conductores

Ayudante: Tomás Veas

13 de julio de 2024

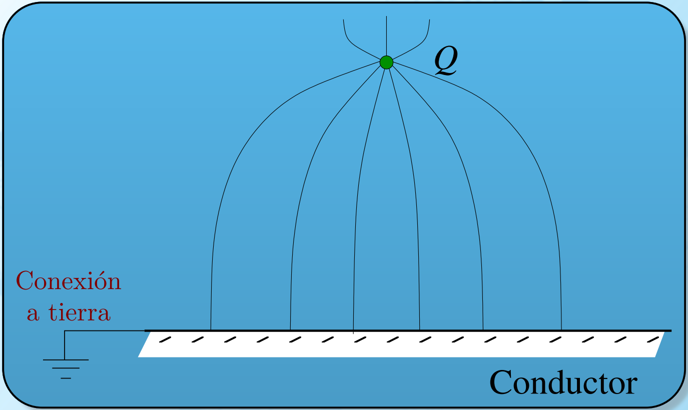
# Carga y un plano conductor

- En el siguiente sistema queda en evidencia la movilidad de las cargas en un conductor.



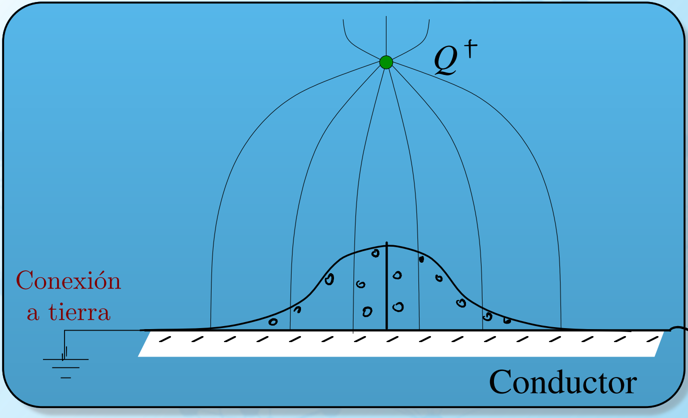
# Lo que esperamos

- ¿Qué tipo de campo eléctrico debemos esperar?



# Lo que esperamos

- ¿Qué tipo de distribución de carga eléctrica debemos esperar?

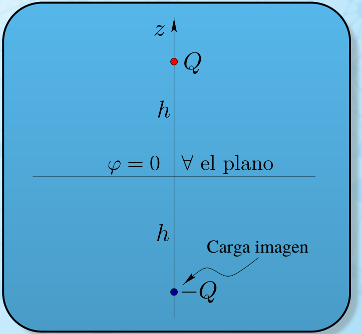



$\varphi = 0$

$Q^-$

# Método de imagen

- Consideremos otro sistema, con sólo dos cargas puntuales equidistantes del plano $xy$.
- La carga original $Q$ y una carga "imagen" $-Q$. La carga imagen no es real es sólo un artilugio matemático.



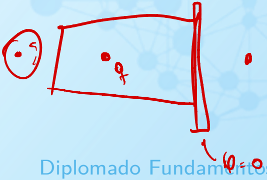
# Método de imagen

- El potencial para este nuevo sistema

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\overset{\text{real}}{Q}}{(x^2+y^2+(z-h)^2)^{1/2}} + \frac{\overset{\text{imagen}}{-Q}}{(x^2+y^2+(z+h)^2)^{1/2}}\,.$$

**El método de imagen**

Este método podría llamarse "ajuste del contorno de la solución".




Volvamos al problema original ...

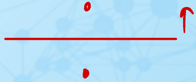
# Problema original

- Consideremos el potencial anterior como la solución del problema de una carga $Q$ a una altura $h$ sobre un plano conductor, en $z = 0$, a potencial nulo, es decir planteamos como solución para $z \geq 0$,

$z = 0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{\left(x^2 + y^2 + (\cancel{z-}h)^2\right)^{1/2}} + \frac{-Q}{\left(x^2 + y^2 + (z + h)^2\right)^{1/2}} \, .$$

$h^2$ $h^2$



# Solución del problema original

- Claramente el potencial propuesto es solución de la ecuación de Laplace, es decir, $\nabla^2\varphi = 0$.

$\nabla^2\varphi = 4\pi\rho$

- Además, el potencial satisface la condición de borde sobre el plano $xy$, es decir para $z = 0$ el potencial es nulo.

- Por lo anterior, es la solución del problema.

- A partir de potencial encontrado podemos derivar el campo eléctrico para la región $z \geq 0$,

$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) =$$
$$\left[\frac{xQ}{\left(x^2+y^2+(z-h)^2\right)^{3/2}} - \frac{xQ}{\left(x^2+y^2+(z+h)^2\right)^{3/2}}\right]\hat{x} +$$
$$+\left[\frac{yQ}{\left(x^2+y^2+(z-h)^2\right)^{3/2}} - \frac{yQ}{\left(x^2+y^2+(z+h)^2\right)^{3/2}}\right]\hat{y} +$$
$$+\left[\frac{(z-h)Q}{\left(x^2+y^2+(z-h)^2\right)^{3/2}} - \frac{(z+h)Q}{\left(x^2+y^2+(z+h)^2\right)^{3/2}}\right]\hat{z}\ .$$

(0,0,h) Q

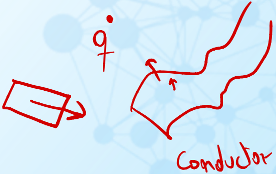
(0,0,-h) -Q

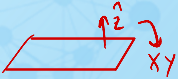
# El campo eléctrico en el plano

- Evaluamos el campo sobre el plano, es decir, $z = 0$,

$$\vec{E}(x, y, z = 0) = 0\,\hat{x} + 0\,\hat{y} - \frac{2hQ}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}\hat{z}\ ,$$

$$= -\frac{2hQ}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}\hat{z}\ .$$

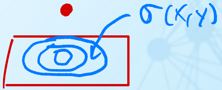



- El campo es normal a la superficie, tal como se esperaba.

Condiciones de borde

# La densidad superficial de carga

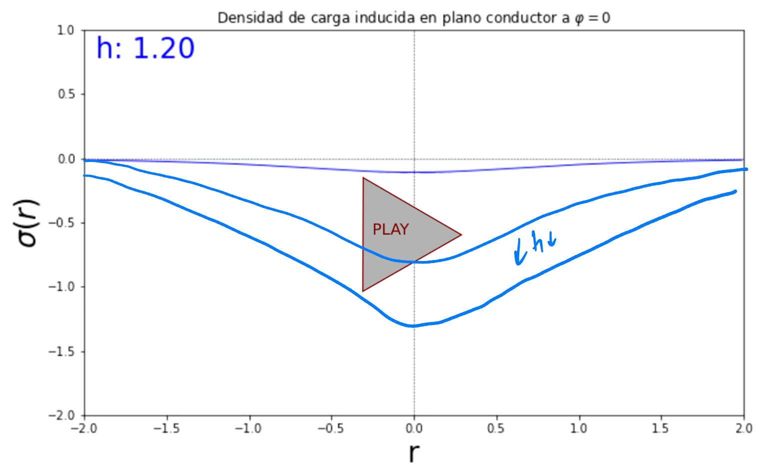



- Para mantener el plano $xy$ a potencial cero se debe inducir una densidad superficial de carga $\sigma(x,y)$ sobre el plano

$$\boxed{\sigma(x,y) = \frac{E_z(x,y)}{4\pi} = \frac{-Qh}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}}$$

- La carga superficial total $q_T$ debe valer $-Q$. Como comprobación podríamos integrar para toda la superficie y ver que ocurre.

# La densidad superficial de carga



# La carga total

- Integramos sobre toda la superficie con el cambio de variable, $r^2 = x^2 + y^2$.

$$\iint dx\,d\phi \;\downarrow\; r\,dr\,d\phi$$

$$
\begin{aligned}
q_T &= \int \sigma \, da \; , \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma(r)\, r dr d\phi = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{-Qhr}{2\pi (r^2+h^2)^{3/2}} \, dr \; , \\
&= \int_0^{\infty} \boxed{\frac{-Qhr\,dr \cdot 2}{(r^2+h^2)^{3/2}\, 2}} = -Qh \left[ \frac{-1}{(r^2+h^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} \; , \\
&= -Qh \left[ \frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{h} \right] = -Q \; .
\end{aligned}
$$

$r^2 + h^2 = u$

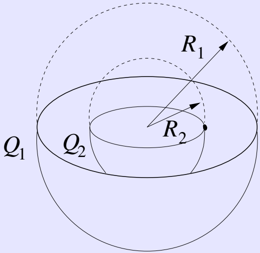
$2r\,dr = du$

$$\frac{du}{2u^{3/2}} = -\frac{2\,1}{2u^{1/2}} = \frac{-1}{u^{1/2}}$$

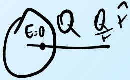
# Ejemplo III.I

## Dos esferas conductoras

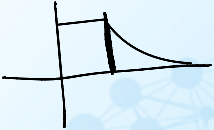
Encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio para la siguiente configuración de dos esferas conductoras concéntricas



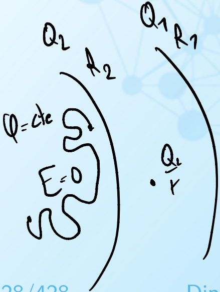
# Solución III.I.i Esfera interior




- El potencial eléctrico debido a la esfera interior de radio $R_2$ y carga $Q_2$ es



$$\varphi_2(r) = \begin{cases} \dfrac{Q_2}{R_2}, & \text{para } 0 < r < R_2, \\ \dfrac{Q_2}{r}, & \text{para } R_2 < r < R_1, \\ \dfrac{Q_2}{r}, & \text{para } R_1 < r. \end{cases}$$



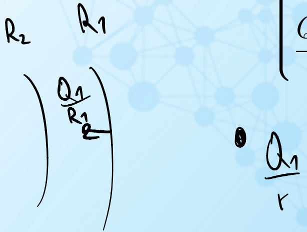

$\frac{Q_2}{r}$

$\varphi_T = \varphi_1 + \varphi_2$

# Solución III.I.ii Esfera exterior

- El potencial eléctrico debido a la esfera exterior de radio $R_1$ y carga $Q_1$ es

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{R_1}, & \text{para } 0 < r < R_2, \\[2ex] \dfrac{Q_1}{R_1}, & \text{para } R_2 < r < R_1, \\[2ex] \dfrac{Q_1}{r}, & \text{para } R_1 < r. \end{cases}$$



# Solución III.I.iii Superponiendo

- Superpongamos ambos potenciales

| Regiones: | $0 < r < R_2$ | $R_2 < r < R_1$ | $R_1 < r$ |
|---|---|---|---|
| Esfera interior | $\dfrac{Q_2}{R_2}$ | $\dfrac{Q_2}{r}$ | $\dfrac{Q_2}{r}$ |
| Esfera exterior | $\dfrac{Q_1}{R_1}$ | $\dfrac{Q_1}{R_1}$ | $\dfrac{Q_1}{r}$ |
| La suma | $\dfrac{Q_1}{R_1} + \dfrac{Q_2}{R_2}$ | $\dfrac{Q_1}{R_1} + \dfrac{Q_2}{r}$ | $\dfrac{Q_1 + Q_2}{r}$ |

# Solución III.I.iv El resultado

- El potencial eléctrico total debido a ambas esferas es

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{R_1} + \dfrac{Q_2}{R_2}\,, & \text{para } 0 < r < R_2, \\[2ex] \dfrac{Q_1}{R_1} + \dfrac{Q_2}{r}\,, & \text{para } R_2 < r < R_1, \\[2ex] \dfrac{Q_1 + Q_2}{r}\,, & \text{para } R_1 < r. \end{cases}$$

- El campo eléctrico total debido a ambas esferas es

$E = -\nabla \varphi$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0}\ , & \text{para } 0 < r < R_2, \\ \dfrac{Q_2}{r^2}\hat{r}\ , & \text{para } R_2 < r < R_1, \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{r^2}\hat{r}\ , & \text{para } R_1 < r. \end{cases}$$

$\frac{Q_1 + Q_2}{r}$

$\ominus\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\hat{r}\right)$

$+\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}\hat{r}$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

# Solución III.I.vi Sobre las esfera

- El potencial sobre la esfera exterior es

$$\varphi_e = \frac{Q_1 + Q_2}{R_1} \ .$$

- El potencial sobre la esfera interior es

$$\varphi_i = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \ .$$

- Si las dos esferas contienen la misma cantidad de carga pero de signos contrarios $Q_1 = -Q_2$. El campo eléctrico es distinto de cero solamente en el espacio entre ellas.

# Problemas de contorno

$\nabla^2 \varphi = 0$


Problemas de contorno
de valor inicial
etc.

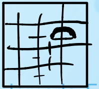
- Existen algunos métodos generales para tratar los problemas de contorno, es decir, encontrar el potencial electroestático dada ciertas condiciones de contorno.

- A continuación, ilustraremos tres métodos, de los varios que existen, para enfrentar este problema.

# Tres métodos a ilustrar

- Representación conforme. Un método analítico en dos dimensiones.
- Métodos de relajación. Un de los método numérico más usados para resolver este problema.
- Método de mínima energía, un método variacional.

Expansión en series    analítico



Diferencia finita    numérico

# Otros métodos de solución

- Los anteriores no son los únicos métodos de solución, existen otros métodos tanto analíticos como numéricos para enfrentar este problema.

- Como ejemplo de otro método analítico tenemos la expansión en funciones ortogonales y como ejemplo de otro método numérico tenemos las diferencias finitas.

# Primer método

- Es un método basado en la teoría de funciones complejas.

- Toda función complejas $F(z) = F(x+iy) = F(x,y)$, se pueden separar en una función que es la parte real, $u(x,y)$, y otra que es su parte imaginaria, $v(x,y)$. Tal que $F(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.

- Se puede demostrar que sí la función $F(z)$ es analítica (diferenciable), cada una de las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen una ecuación de Laplace en dos dimensiones.

# Ecuación de Laplace 2D

- Como las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen una ecuación de Laplace en dos dimensiones ellas son armónicas.

**Ecuación de Laplace en dos dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0 \ .$$

# Restricciones

- Lamentablemente, este método es sólo aplicable a sistemas de dos dimensiones.

- Sin embargo, hay muchos sistemas que pueden ser reducido a dos dimensiones, por ejemplo: cilindros en los cuales no hay variación sobre el eje $z$ o problemas rectangulares como planos infinito.

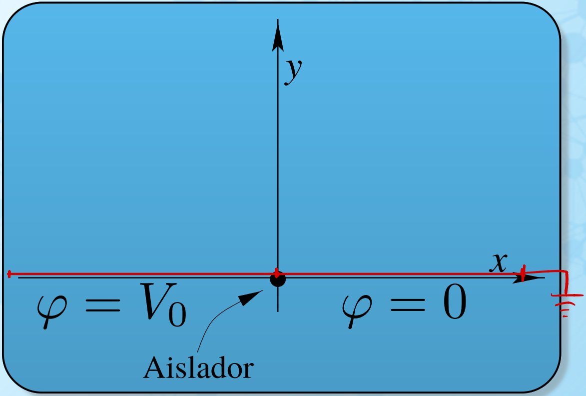
# Representación Conforme

- Una aplicación $F$ es conforme si mantiene los ángulos orientados. Es decir, si dos curvas $C_1$, $C_2$ formaban un ángulo $\phi_1$ en un punto $z$ entonces sus respectivas imágenes bajo $F$, digamos $C_1'$ y $C_2'$ forman el mismo ángulo en el punto $z'$, que es la imagen de $z$.

- La idea es encontrar una aplicación conforme que nos permita transformar las condiciones de borde del problema original a unas que nos resulten más fáciles para resolver.

# Un ejemplo de mapeo conforme

- Consideremos el siguiente problema: encontrar el potencial eléctrico en el plano superior ($y > 0$) con las condiciones de contorno especificadas en la figura.



# El mapeo conforme

- Representamos cualquier punto del plano $(x, y)$ por un complejo de la forma $z = x + iy$ o bien en su forma polar $z = re^{i\theta}$.

la aplicación

- Planteamos el mapeo conforme $w$, es decir, una función de los $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que preserva los ángulos orientados,

**Ecuación de Laplace en dos dimensiones**

$$w(z) = u(z) + iv(z) = \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} re^{i\theta} = \operatorname{Log} r + i\theta \ .$$

# El mapeo conforme

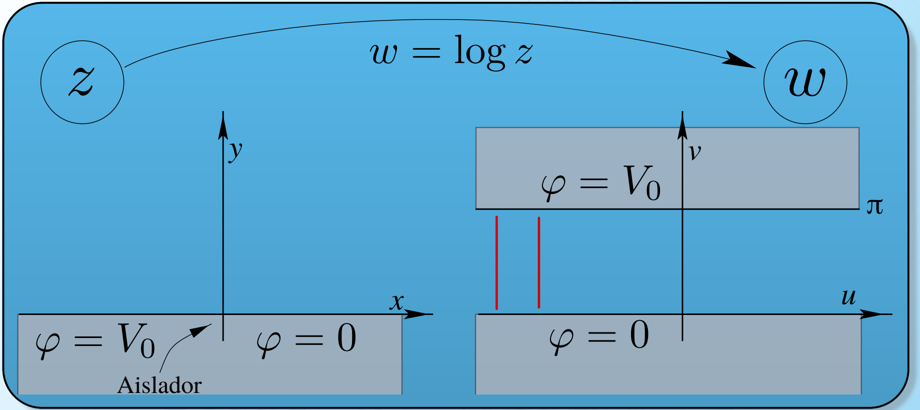
- Representamos cualquier punto del plano $(x, y)$ por un complejo de la forma $z = x + iy$ o bien en su forma polar $z = re^{i\theta}$.

- Planteamos el mapeo conforme $w$, es decir, una función de los $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que preserva los ángulos orientados,

**Ecuación de Laplace en dos dimensiones**

$$w(z) = u(z) + iv(z) = \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} re^{i\theta} = \operatorname{Log} r + i\theta \ .$$

Entonces el problema se mapea en ...


z
w = log z
w
y
x
φ = V0
Aislador
φ = 0
v
φ = V0
π
u
φ = 0

# La solución en el plano $w$

- La primera semirrecta $\theta = 0 \;\longrightarrow v = 0$.
- La segunda semi-recta $\theta = \pi \;\longrightarrow v = \pi$.
- la solución en el plano $w$ es

$$\varphi(u, v) = \frac{V_o}{\pi} v = \frac{V_o}{\pi} \theta \;, \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

# La solución en cartesianas

- En términos de las coordenadas cartesianas

**La Solución**

$$\varphi(x,y) = \frac{V_o}{\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

# Chequando la solución

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} \ ,$$

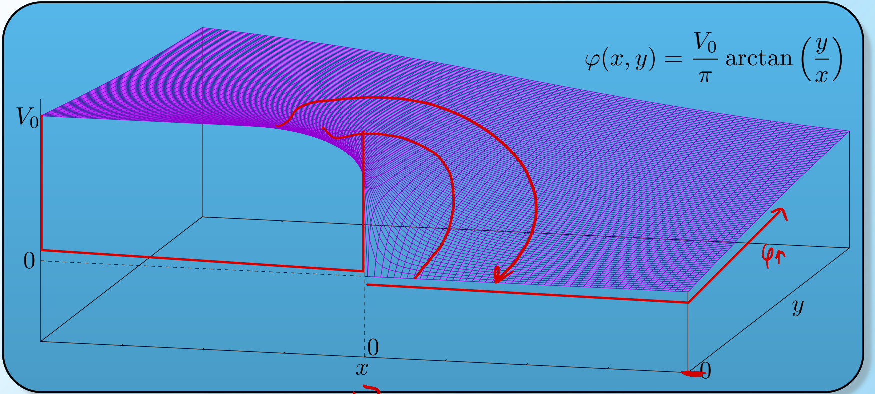
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{V_o}{\pi}\arctan\frac{y}{x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{V_o}{\pi}\arctan\frac{y}{x} \ ,$$

$$= \frac{V_o}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{-y}{x^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\right)\right] \ ,$$

$$= \frac{V_o}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{y^2+x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y^2+x^2}\right)\right] \ ,$$

$$= \frac{V_o}{\pi}\left[\frac{2xy}{(y^2+x^2)^2} + \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}\right] = 0 \ .$$

## Graficando la solución



# Segundo método

- Existen métodos numéricos para encontrar, en forma aproximada, el potencial electrostático con ciertos valores de contorno dados.

- Un método simple y casi universalmente aplicable corresponde al Método de Relajación, que está basado en el hecho de que para una función armónicas su valor en un punto es igual al valor promedio sobre una esfera en torno al punto.

# Algoritmo del Método

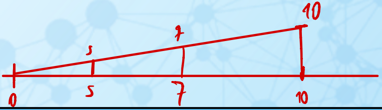
- En este método discretizamos el espacio $\vec{x}_i$ y definimos el potencial sobre ese conjunto discreto de puntos, $\varphi(\vec{x}_i)$.

- Todos los valores (salvo el contorno que está fijo al valor de la condición dada) se ajustan tal que cumplan con el promedio de los valores vecinos.


- Iteramos este proceso hasta que los cambios sean despreciables (o tan pequeños como se quiera, teniendo en cuenta la precisión numérica).

# Ejemplo de Relajación

- Consideremos el problema de encontrar numéricamente el potencial para un sistema unidimensional con las condiciones de borde especificadas en la figura.




$$x = 0 \qquad\qquad x = 10$$

$$\varphi(x = 0) = 0 \quad \varphi(x = 10) = 10$$

# La solución analítica

- La ecuación de Laplace en una dimensión

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \Longrightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} = a \Longrightarrow \varphi(x) = ax + b \ ,$$

donde $a$ y $b$ son constantes a determinar imponiendo las condiciones de contorno.

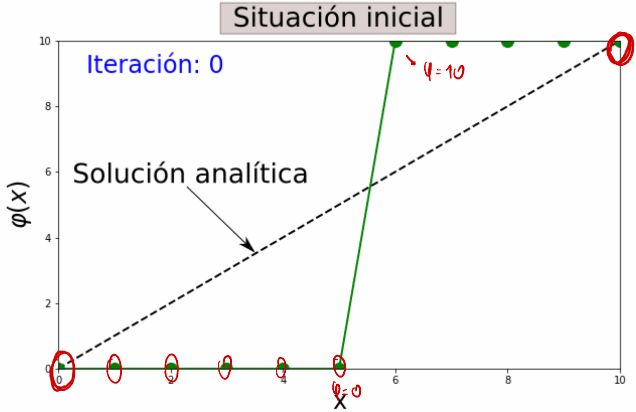
- La condiciones de borde

$$\varphi(0) = 0 \Longrightarrow b = 0 \ , \qquad \varphi(10) = 10 \Longrightarrow a = 1 \ .$$

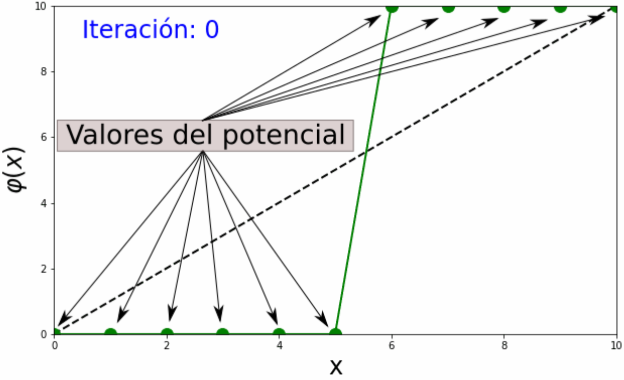
- La solución analítica del problema es

$$\boxed{\varphi(x) = x}$$

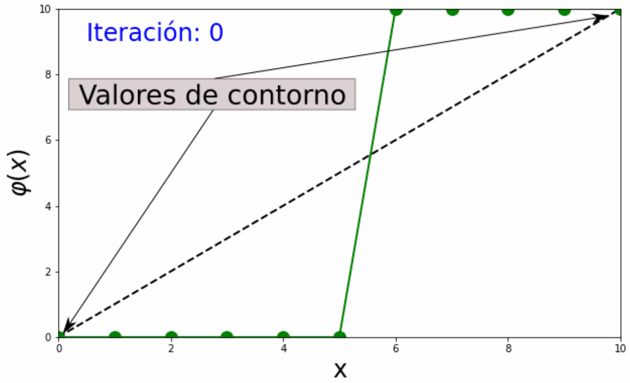
# La solución numérica I



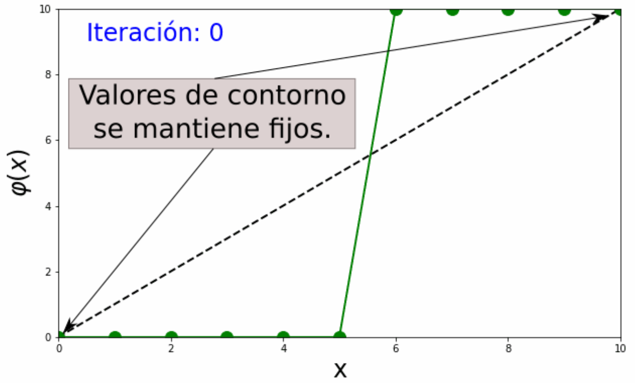
# La solución numérica II



# La solución numérica III



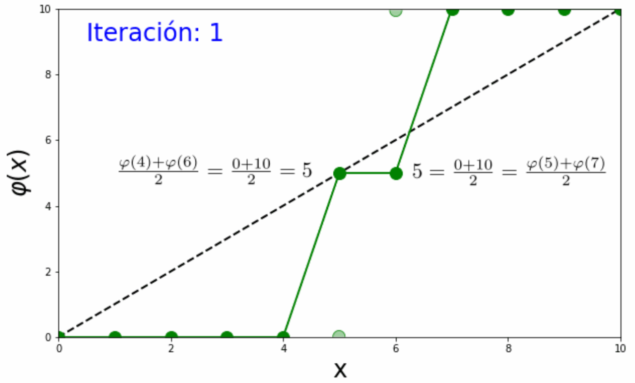
# La solución numérica IV



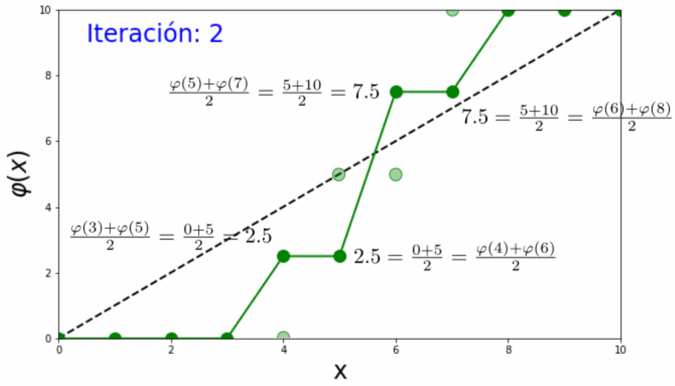
# El código

```python
# Implementación del algoritmo de relajación en 1D

import numpy as np

Xi = np.array([0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])
Y0 = np.array([0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,10.0,10.0,10.0,10.0,10.0])

Yi = [yi for yi in Y0]
for i in range(100):

    print(f"Iteración {i:<3d}, {Yi:}")
    y = [yi for yi in Y0]

    for j in range(1,len(Yi)-1) :
        y[j] = (Yi[j-1]+Yi[j+1])/2
    for j in range(len(Yi)):
        Yi[j] = y[j]
```

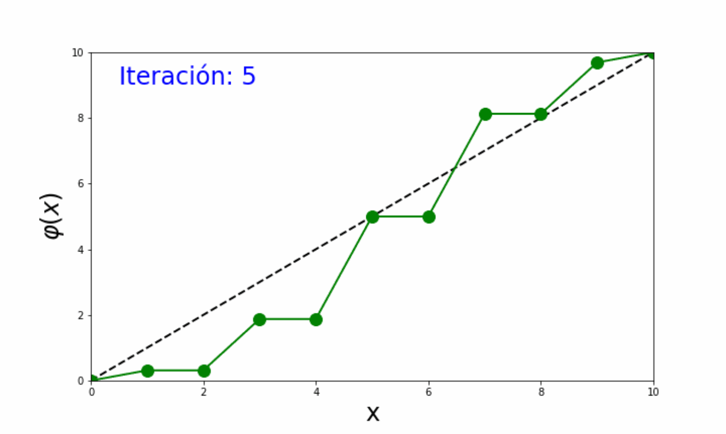
# Primera iteración



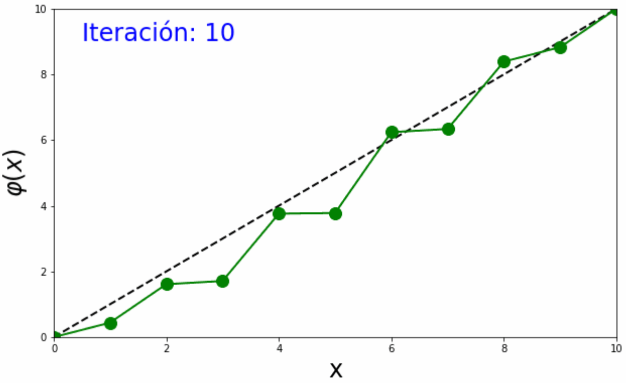
# Segunda iteración



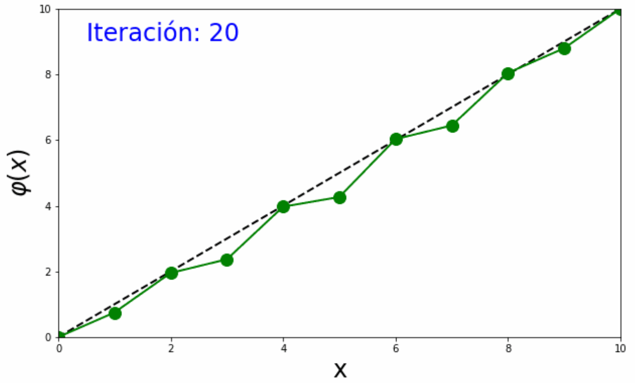
# Iteración 5



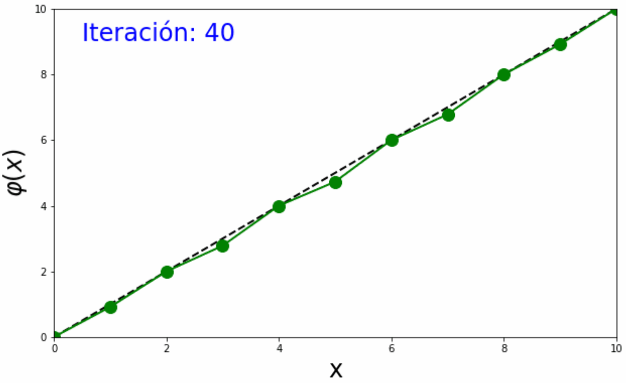
# Iteración 10



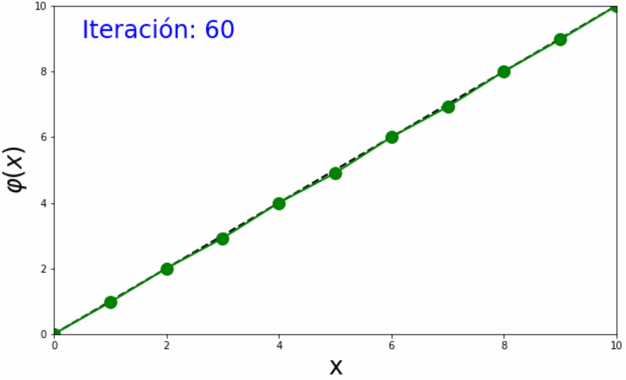
# ITERACIÓN 20



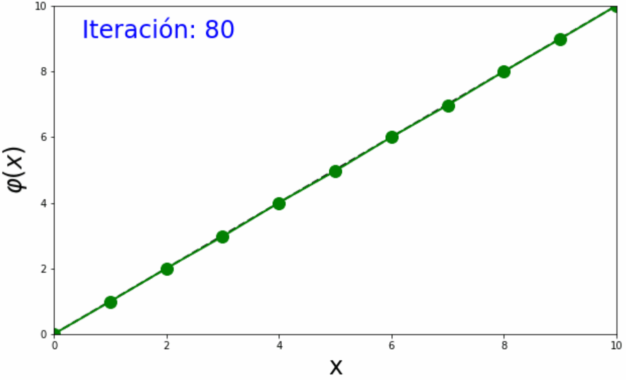
# Iteración 40



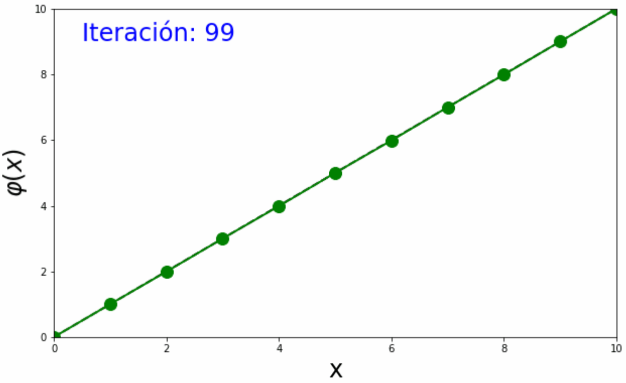
# Iteración 60



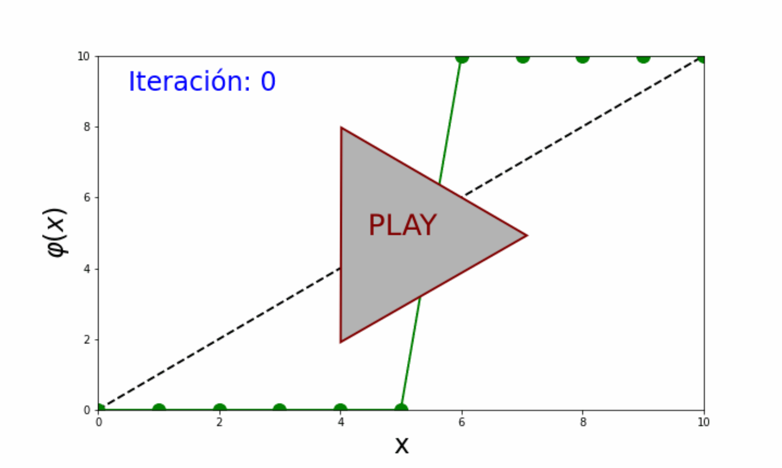
# Iteración 80



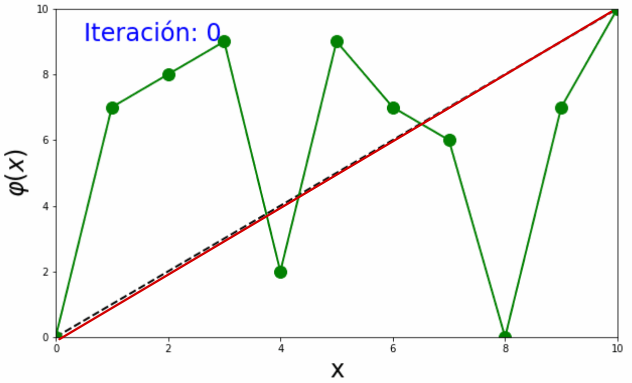
# Iteración 99



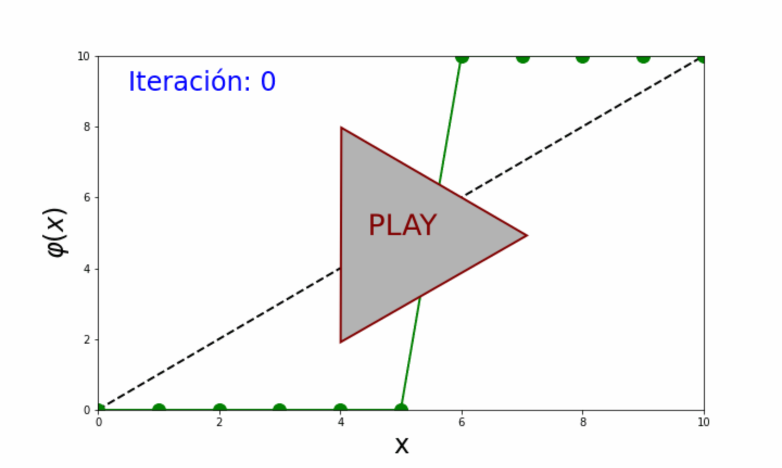
# Proceso de relajación



# Otra condición inicial



# Nuevo proceso de relajación



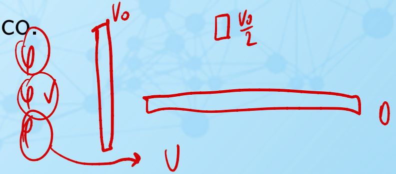
# Método variacional

- Si consideramos la energía de un sistema electrostático, como un funcional del potencial eléctrico:

$\vec{E}$ $\nabla\varphi$ $|E|^2 = E$

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \left|\vec{\nabla}\varphi\right|^2\, dv$$

- Enunciado como principio variacional: el funcional de la energía será mínimo cuando $\varphi$, que debe satisfacer las condiciones de borde, sea la solución al problema físico.



# Método variacional

- Entre más se aproximan la función de prueba a la solución del problema menor será $U$.

- Podemos elegir una familia paramétrica de funciones de prueba que satisfagan las condiciones de borde y variar los parámetros hasta encontrar el mínimo.

- Si la familia de prueba elegida incluye entre sus miembros la solución del problema físico, cuando minimicemos la encontraremos.

# El problema

- Con las siguientes condiciones de borde

$$x = 0 \qquad\qquad x = d$$

$$\varphi(x = 0) = 0 \quad \varphi(x = d) = V_0$$

# La solución analítica

- La ecuación de Laplace en una dimensión

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \Longrightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} = a \Longrightarrow \varphi(x) = ax + b \ ,$$

donde $a$ y $b$ son constantes a determinar imponiendo las condiciones de contorno.

- La condiciones de borde

$$\varphi(0) = 0 \Longrightarrow b = 0 \ , \qquad \varphi(d) = V_0 \Longrightarrow a = \frac{V_0}{d} \ .$$

- La solución analítica del problema es

$$\boxed{\varphi(x) = V_0 \frac{x}{d}}$$

## Familia de Funciones

- Consideremos la siguiente familia de funciones de prueba

$$\psi_\alpha(x) = V_o \frac{x^2}{d^2} + \alpha x(x-d) \ ,$$

$\varphi(\alpha=1)$
$\varphi(\alpha=2)$
$\varphi(\alpha=3)$

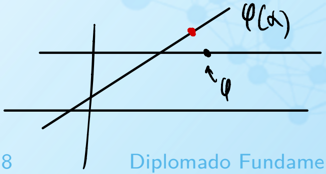
el parámetro

donde $\alpha$ es un parámetro.

$V_0 \frac{x^2}{d^2} + \alpha x(x^2 - d)$ $\varphi = V_0 \frac{x \cdot 3}{d}$

- Verificamos que las condiciones de borde son satisfechas $\psi_\alpha(0) = 0$ y $\psi_\alpha(d) = V_o$.

$\varphi = V_0 \frac{d^2}{d^2} + \alpha x(\cancel{d-d})$



# El módulo cuadrado del gradiente

$\int |\nabla\varphi|^2 dv$

$$\psi_\alpha(x) = V_o \frac{x^2}{d^2} + \alpha x^2 - \alpha d x \ ,$$

$$\vec{\nabla}\psi_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x}\hat{x} = \left(2V_o \frac{x}{d^2} + 2\alpha x - \alpha d\right) \hat{x} \ ,$$

$$\left| \vec{\nabla}\psi_\alpha \right|^2 = 4\left(\frac{V_o}{d^2} + \alpha\right)^2 x^2 - 4\left(\frac{V_o}{d^2} + \alpha\right) \alpha d x + \alpha^2 d^2 .$$

## En la integral

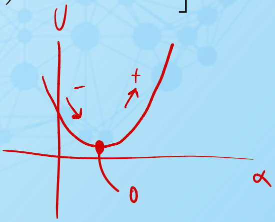
$$U = \frac{1}{8\pi}\int \left|\vec{\nabla}\psi_\alpha\right|^2 dv \ ,$$

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_0^d \left[4\left(\frac{V_o}{d^2}+\alpha\right)^2 x^2 - 4\left(\frac{V_o}{d^2}+\alpha\right)\alpha d x + \alpha^2 d^2\right] dx \ ,$$

$$U = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{V_o}{d^2}+\alpha\right)^2 d^3 - 2\left(\frac{V_o}{d^2}+\alpha\right)\alpha d^3 + \alpha^2 d^3\right] \ ,$$

$$U(\alpha) = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{4}{3}\frac{V_o^2}{d} + \frac{2}{3}V_o d\alpha + \frac{1}{3}d^3\alpha^2\right] \ .$$

$\left(\frac{V_o}{(1+x)^2} + (2+x^3)x^{3/2}\right.$



# Minimización

- Para buscar el mínimo, derivamos el funcional respecto al parámetro $\alpha$ e igualamos a cero,

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{2}{3}V_o d + \frac{2}{3}d^3\alpha\right] = 0 \ .$$

- Al resolver para $\alpha$.

$$V_o d + d^3\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{V_o}{d^2} \ .$$

y. . .

# La solución

- Al reemplazar en la solución

$$\psi_{\alpha_{\text{mín}}}(x) = V_o \frac{x^2}{d^2} + \alpha x(x-d)$$

$$= \cancel{V_o \frac{x^2}{d^2}} - \cancel{V_o \frac{x^2}{d^2}} + V_o \frac{x\cancel{d}}{d^{\cancel{2}}} \,. \qquad + V_o \frac{x}{d}$$

**La Solución**

$$\psi_{\alpha_{\text{mín}}}(x) = V_o \frac{x}{d} = \varphi(x)$$