Cálculo II
Ejercicios
11-10-2017

Cálculo II

Lista de ejercicios

1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ b) $\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}$

   c) $\arctan(1+x^2)$ d) $\arctan(\cos x)$

   e) $\exp(x\arctan x^2)$ f) $\arccos\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$

2. Si $|x|<1$, demuestre que $\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arcsen}x$.

3. Grafique la función $\operatorname{arcsen}(\cos x)$.

4. Denote por Sec la restricción de la función secante al conjunto $D=[0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi]$. Demuestre que Sec es invertible y grafique esta función y sus inversa. Pruebe que

$$\frac{d}{dx}\left(Sec^{-1}x\right)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

5. Si $0<b\le a$ y $0\le x<\pi$, demuestre que la función

$$f(x)=\arccos\left(\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right)-2\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

   es constante. Encuentre dicha constante.

6. Calcule las derivadas de las siguientes funciones, cuando tenga sentido:

   a) $(\ln x)^4$ b) $\exp(\sec x+\tan x)$

   c) $\ln(\sec x+\tan x)$ d) $\ln(a^x+1+\cos x)$, $a>1$

   e) $x^{\sqrt{x}}$ f) $(\operatorname{sen}x)^{\cos x}$

g) $2^{\sqrt{x}}$ 		h) $\log_{10} x$

i) $\log_x 2$ 		j) $x^{\log_{10}\sqrt{1+x^2}}$

7. Use el teorema del valor medio para demostrar las siguientes desigualdades:

   a) $\dfrac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h$ si $h \in \left]-1,0\right[\cup IR^+$.

   b) $\dfrac{a-b}{a} \leq \ln\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a-b}{b}$ si $0 < b \leq a$.

8. ¿Es cierto que $\log_2(x+\sqrt{x^2-1}) = -\log_2(x-\sqrt{x^2-1})$?

9. Demuestre las siguientes identidades entre funciones hiperbólicas:

   a) $\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \operatorname{senh} b \cosh a$
   b) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b$
   c) $(\cosh a + \operatorname{senh} a)^n = \cosh na + \operatorname{senh} na$
   d) $\operatorname{sec}h^2 x = 1 - \tanh^2 x$
   e) $\operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{cotanh}^2 x - 1$

10. Pruebe las siguientes fórmulas de derivación: a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotanh} x) = -\operatorname{cosech}^2 x$

    b) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$ 		c) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotanh} x$

11. Grafique senh, cosh y tanh.

12. Pruebe que $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, para todo número real x.

13. Pruebe que $\operatorname{Cosh}^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, para todo número real $x \geq 1$, donde Cosh denota la restricción de cosh a $IR^+ \cup \{0\}$.

14. Pruebe que $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, para $|x| < 1$.

Cálculo de integrales:

15. Use el método de sustitución para hallar las siguientes primitivas:

a) $\int x^3 \operatorname{sen} x^4 dx$ b) $\int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2} dx$ c) $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} a\theta}{\cos a\theta + b} d\theta$ e) $\int \frac{\sec^2 \theta}{tan^5\theta + 1} d\theta$ f) $\int \left(x^2+1\right)\cos\left(3x^3+3x\right)dx$

g) $\int \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$ h) $\int \cos(ax+b)dx$ i) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

j) $\int tan^{2000} x \sec^2 x\, dx$ k) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{(3+\cos 2x)^2}$ l) $\int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{a+\operatorname{sen} t}}$

16. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 x^3\, dx$ b) $\int_4^9 \sqrt{x}\, dx$ c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ d) $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$

e) $\int_0^a \left(a^2 x - x^3\right)dx$ f) $\int_2^3 \frac{t\, dt}{\left(1+t^2\right)^3}$ g) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^2}} dx$

h) $\int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta$ i) $\int_0^3 \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2+16}}$ j) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ k) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} d\theta$

17. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2+36}$ b) $\int \frac{dx}{x^2+15}$ c) $\int \frac{dz}{\sqrt{25-z^2}}$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

e) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$ f) $\int \frac{dx}{x^2+6x+11}$ g) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

h) $\int \frac{dz}{\sqrt{25-16x^2}}$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$ j) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$

18. Use el método de integración por partes para calcular:

a) $\int x \operatorname{sen} x dx$ b) $\int x\cos x\, dx$ c) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$ d) $\int x^2 \cos x\, dx$

e) $\int \operatorname{sen}^2 x dx$ f) $\int \cos^2 x\, dx$ g) $\int x \operatorname{sen}\frac{x}{2} dx$ h) $\int x\cos 2x dx$

i) $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$ j) $\int \arccos 2x\, dx$ k) $\int \arctan x\, dx$ l) $\int x \arctan x\, dx$

19. Hallar fórmulas de reducción para:

a) $I_n = \int x^n \operatorname{sen} x\, dx$ b) $J_n = \int x^n \cos x\, dx$

c) $I_n = \int \operatorname{sen}^n x\, dx$ d) $J_n = \int \cos^n x\, dx$

e) Use las fórmulas de reducción halladas en a), b), c) y d) para calcular I_n , J_n, para $n = 2,3,4,5,6.$

20. Demuestre la fórmula de reducción $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, $n \in IN$, si $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

Use esta información para calcular I_n, para $n = 2,3,4,5,6.$

21. Calcule las siguientes primitivas:

a) $\int \dfrac{dx}{x+a}$ b) $\int \dfrac{x}{x^2+a^2}dx$ c) $\int \dfrac{dx}{x\ln x}$

d) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}$ e) $\int \sec x\, dx$ f) $\int \sec^3 x\, dx$

22. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \dfrac{dx}{x+a}$ b) $\int \dfrac{x}{x^2+a^2}dx$ c) $\int \dfrac{dx}{x\ln x}$

d) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}$ e) $\int \sec x\, dx$ f) $\int \sec^3 x\, dx$

23. Calcule:

a) $\int \ln x\, dx$ b) $\int x \ln x\, dx$ c) $\int x^2 \ln x\, dx$

d) Ahora intente calcular $I_n = \int x^n \ln x\, dx$, para n número natural. Deduzca una fórmula de recurrencia para calcular integrales de este tipo.

24. Encuentre las siguientes primitivas:

a) $\int \dfrac{dx}{x^2+5x+6}$ b) $\int \dfrac{dx}{x^2+x+12}$ c) $\int \dfrac{dx}{x^3+x}$ d) $\int \dfrac{dx}{x^3-1}$

25. Hallar las derivadas de las siguientes funciones, en aquellos puntos donde tenga sentido hacerlo:

a) $f(x) = \ln(Arc\operatorname{sen} 5x)$ b) $f(x) = x^n e^{-x^2}$ c) $f(x) = \ln\cos\dfrac{x-1}{x}$

d) $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ e) $g(x) = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$

f) $g(x) = (\operatorname{sen} x)^x$ g) $h(x) = x^{x^2}$ h) $h(x) = (Arctan\, x)^x$

i) $\frac{d}{dx}(Arc\cosh x)$, para $x > 0$

j) $\frac{d}{dx}(Arc\operatorname{senh}\frac{1}{1+x^2})$

k) $\frac{d}{dx}(x^{Arc\operatorname{senh}\frac{1}{1+x^2}})$, para $x > 0$

l) $\frac{d}{dx}((\cosh x)^{\operatorname{senh} x})$

26. Mediante el método de integración por partes calcule las siguientes primitivas:

a) $I = \int xe^x dx$ b) $I = \int x^2 e^x dx$ c) $I = \int x^2 e^{3x} dx$

d) $J = \int e^x \cos x\, dx$ e) $J = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ f) $J = \int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx$

g) $J = \int e^{2x} \cos 2x\, dx$ h) $J = \int e^x \operatorname{sen} 2x\, dx$ i) $K = \int e^{3x} \cos 5x\, dx$

27. Calcule las siguientes integrales:

a) $I = \int \frac{dx}{x^2 + x - 20}$ b) $J = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$ c) $K = \int \frac{dx}{x^2 - 2}$

d) $L = \int \frac{dx}{(x-1)^2 (x+2)}$ e) $M = \int \frac{dx}{x^3 + 2x}$ f) $N = \int \frac{x+3}{x^2 + 5x + 6} dx$

g) $I = \int \frac{dx}{x^2 + 1}$ h) $J = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

28. Hallar una fórmula de reducción para la siguiente integral $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$. ¿Cuál es la fórmula de reducción para $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$.

29. Demuestre la fórmula de reducción $I_{m,n} = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$, donde $I_{m,n} = \int x^m (\ln x)^n\, dx$ y $m, n \neq -1$.

30. Si $I_n = \int \sec^n x\, dx$, pruebe la fórmula de reducción

$$I_n = \frac{1}{n-1}\left\{\sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}\right\},$$ donde n es natural y $n \geq 2$.

31. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+6)} dx$ b) $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ c) $\int \frac{x\, dx}{x^3 - 3x + 2}$

d) $\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx$ e) $\int \frac{8x^3 + 7}{(x+1)(2x+1)^3} dx$ f) $\int \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - 1} dx$

g) $\int \frac{x+2}{x^2+x}dx$ h) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ i) $\int \frac{x\,dx}{(x\ \ +1)^2}$

k) $\int \frac{dx}{x^3-x}$ l) $\int \frac{x^2dx}{x^2+x-6}$ m) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-4x+4}$

32. Use la sustitución $u = tan\frac{x}{2}$ para calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$ b) $\int \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$

c) $\int \frac{dx}{2\,\mathrm{sen}\,x-\cos x+5}$ d) $\int \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{1+\mathrm{sen}^2\,x}dx$

33. Grafique las siguientes funciones:

a) $f(x) = tanhx$ b) $g(x) = \mathrm{senh}\,2x$ c) $h(x) = \cosh 3x$

34. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,2x}{\mathrm{sen}\,3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x-x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2+x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{Arctanx}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}$

35. Calcule:

a) $\int \frac{dx}{1+2\tan x}$ b) $\int \frac{\mathrm{sen}\,x-\cos x}{\mathrm{sen}\,x+\cos x}dx$ c) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\mathrm{sen}\,x\cos x}dx$

d) $\int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^4 x}dx$ e) $\int \sqrt{\frac{\mathrm{sen}^3\,x}{\cos^7\,x}}dx$ f) $\int \tan^5 x dx$

g) $\int \frac{2-\mathrm{sen}\,x}{2+\cos x}dx$ h) $\int \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{1-\tan x}dx$ i) $\int \frac{1}{1+\mathrm{sen}^2}dx$

j) $\int \frac{1}{(\mathrm{sen}\,x+\cos x)^2}dx$ k) $\int \frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x+\tan^2 x}$ l) $\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}dx$

36. Calcule:

a) $\int \frac{1}{a+b\cos x}dx$, considere todos los casos posibles.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x}\,dx$, con $a,b>0$.

c) $\displaystyle\int \frac{1}{a + b\operatorname{sen} x}\,dx$, considere todos los casos posibles.

d) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2\operatorname{sen}^2 x - b^2\cos^2 x}\,dx$, con $a,b>0$.

37. Demuestre que $a\operatorname{sen}\alpha + b\cos\alpha = r\operatorname{sen}(x+\alpha)$, donde r,α son las coordenadas polares del punto (a,b).

a) Pruebe que $\displaystyle\int \frac{1}{a\operatorname{sen} x + b\cos x}\,dx = \frac{1}{r}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right| + C$

b) Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}\,dx$