AYUDANTÍA 5 – ANÁLISIS 2 POSGRADO

DAVID URRUTIA VERGARA – GONZALO ROBLEDO VELOSO

Como es habitual, la sigla $\mathbb{K}$- **e.n.v** corresponde a la de $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado.

Ejercicio 1

Sean $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach y $T : E \to F$ una transformación lineal sobreyectiva tal que $T(B_{||\cdot||_E}(0_E, r))$ esté contenido en algún compacto de F para cada $r > 0$. Demuestre que F es de dimensión finita.

Demostración. La idea de esta demostración es probar que la bola cerrada $B_{||\cdot||_F}[0_F, 1]$ es un conjunto compacto de E.

Primeramente, dado que E, F son dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach y T es sobreyectiva, el Teorema de la funciónn abierta establece la existencia de $c > 0$ con la propiedad

$$B_{||\cdot||_F}(0_F, c) \subseteq T(B_{||\cdot||_E}(0_E, 1))$$

además, la hipótesis establece que $T(B_{||\cdot||_E}(0_E, r))$ está dentro de un compacto para todo $r > 0$, en particular, tenemos esto para $r = \frac{1}{c}$, es decir, existe $K \subseteq F$ compacto con la propiedad

$$T(B_{||\cdot||_E}(0_E, 1/c)) \subseteq K,$$

luego, se tiene que

$$B_{||\cdot||_F}(0_F, 1) = \frac{1}{c}B_{||\cdot||_F}(0_F, c) \subseteq \frac{1}{c}T(B_{||\cdot||_E}(0_E, 1)) = T(B_{||\cdot||_E}(0_E, 1/c)) \subseteq K,$$

de este modo, se tiene que $B_{||\cdot||_F}(0_F, 1) \subseteq K$ y por ende, dado que la clausura de la bola abierta es la misma bola, pero cerrada junto con que la clausura de un conjunto A es el cerrado más pequeño que contiene a A, se verifica

$$B_{||\cdot||_F}[0, 1] = \overline{B_{||\cdot||_F}(0, 1)} \subseteq K$$

De este modo, $B_{||\cdot||_F}[0, 1]$ es un conjunto cerrado dentro del compacto K, lo cual implica que $B_{||\cdot||_F}[0, 1]$ es compacto. Por ende, un corolario del Lema de Riesz establece que F tiene dimensión finita. $\square$

Ejercicio 2

Sea $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$-espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Considere la ecuación

$$T(x) = y. \tag{1}$$

Demuestre que son equivalentes:

(a) Si $T(\xi) = 0$, implica $\xi = 0$ y (1) tiene solución para todo $y \in E$.

(b) Para cada $y \in E$, la ecuación (1) posee una única solución $x = x(y)$ la cual depende continuamente de y.

Demostración. Supongamos que (a) es cierto. Es decir,

$$T(\xi) = 0 \implies \xi = 0$$

y $T(x) = y$ tiene solución para todo $y \in E$. Entonces, tenemos que $\ker T = \{0\}$ y que T es sobreyectiva, es decir, T es 1-1 y sobre, lo cual implica que T es una biyección.

Esto implica que $T^{-1}(y)$ es la única solución de $T(x) = y$ para todo $y \in E$. Más aún, como T es continua y sobreyectiva definida sobre el espacio de Banach E, un corolario del Teorema de la Función Abierta establece que T^{-1} también es continua, lo cual implica que $y \mapsto x(y) := T^{-1}(y)$ es continua.

En resumen, para cada $y \in E$ existe un único $x := x(y)$ que soluciona a la ecuación $T(x) = y$ la cual depende continuamente de y, lo que demuestra (b).

Conversamente, si suponemos que (b) es cierto, supongamos que $\xi \in E$ es tal que $T(\xi) = 0$, entonces, como T es lineal, se tiene que $T(0) = 0$ lo cual implica que $\xi = 0$ por la unicidad establecida en (b).

Por otro lado, si $y \in E$, se tiene que existe un único x tal que $T(x) = y$, o dicho de otra forma, (1) tiene una solución para y. Es decir, para todo $y \in E$, la ecuación $T(x) = y$ tiene solución. Por ende, hemos demostrado (a) y se concluye la demostración.

$\square$

Ejercicio 3

Un corolario del Teorema de la Aplicación Abierta establece que si $T : E \to F$ es una función continua entre los dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$, la cual es biyectiva, entonces, T^{-1} es continua. Use el Teorema del Gráfico para demostrar ese mismo corolario.

Demostración. Si logramos demostrar que el conjunto

$$\mathcal{G}(T^{-1}) = \{(x, T^{-1}(x)) \colon x \in F\}$$

es cerrado en $F \times E$, estamos listos. Pues bien, sea $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}(T^{-1})$ con $(x_n, y_n) \to (x, y)$, entonces, se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ con $x_n \to x$ y $T^{-1}(x_n) = y_n$. Tenemos que probar que $T^{-1}(x) = y$ para concluir que $(x, y) \in \mathcal{G}(T^{-1})$.

Como $T^{-1}(x_n) = y_n$, tiene que $T(y_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, la continuidad de T implica que

$$x = \lim_{n\to+\infty} T(y_n) = T(y),$$

es decir, $x = T(y)$ y por ende, $T^{-1}(x) = y$. Esto implica que $(x, y) \in \mathcal{G}(T^{-1})$ y por ende, este último es cerrado. Luego, el Teorema del Gráfico cerrado establece que $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. $\square$

Ejercicio 4

Sea $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$-espacio de Banach y $T : E \to E^\star$ con $x \mapsto T_x$ y la propiedad

$$T_x(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demuestre que $T \in \mathcal{L}(E, E^\star)$.

Demostración. Recordemos que $E^\star$ es un $\mathbb{R}$-espacio de Banach (sin necesidad de que $(E, ||\cdot||_E)$ lo sea). Ahora, como $(E, ||\cdot||_E)$ también es de Banach, la idea de esta demostración es recuperar las hipótesis del Teorema del Gráfico cerrado, es decir, tenemos que demostrar que el conjunto

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, T(x)) \colon x \in E\}$$

es cerrado en $E \times E^\star$, ésto equivale a que si tenemos una sucesión $(x_n, T_{x_n}) \to (x, f)$ en $E \times E^\star$, se tiene que probar que $T_x = f$.

Antes de eso, un resultado importantísmo que tenemos que considerar es que, dado que $(x_n, T_{x_n}) \to (x, f)$, se tiene que $T_{x_n} \to f$ en $(E^\star, ||\cdot||_{E^\star})$, pues, al igual que en la demostración del Teorema del Gráfico Cerrado, estamos considerando la norma $||(x, f)||_{E\times E^\star} = ||x||_E + ||f||_{E^\star}$. Más aún, como $\{T_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $E^\star$, se tiene que es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $||T_{x_n}||_{E^\star} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
|T_{x_n}(x_n) - f(x)| &\leq |T_{x_n}(x_n) - T_{x_n}(x)| + |T_{x_n}(x) - f(x)| \\
&\leq ||T_{x_n}||_{E^\star}||x_n - x|| + |T_{x_n}(x) - f(x)| \\
&\leq M||x_n - x||_E + |T_{x_n}(x) - f(x)|
\end{aligned}$$

es decir,

$$|T_{x_n}(x_n) - f(x)| \leq M||x_n - x||_E + |T_{x_n}(x) - f(x)| \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

entonces, como $x_n \to x$ y $T_{x_n} \to f$, en particular, se tiene que $T_{x_n}(u) \to f(u)$ para todo $u \in E$ y por ende, al aplicar esto al caso $u = x$, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} |T_{x_n}(x_n) - f(x)| = 0$$

es decir, $T_{x_n}(x_n) \to f(x)$.

De este modo, se tiene que para $y \in E$ y $u_n = x_n - y \in E$, se tiene que

$$T_{x_n}(x_n) - T_y(x_n) - T_y(x_n) + T_y(y) = T_{x_n - y}(x_n - y) = T_{u_n}(u_n) \geq 0,$$

de este modo, al hacer paso al límite, se tiene que $T_{x_n}(y) \to f(y)$ y $T_{x_n}(x_n) \to f(x)$ y se tiene que

$$(f - T_y)(x - y) = f(x) - T_y(x) - T_y(x) + T_y(y) \geq 0,$$

luego, para el caso $y = x + tz$ donde $t \in \mathbb{R}$ y $z \in E$ (arbitrarios), se tiene que

$$f(tz) - T_x(tz) - T_{tz}(tz) = (f - T_{x+tz})(-tz) \geq 0,$$

luego, como $T_{tz}(tz) \geq 0$, se tiene que $0 \geq -T_{tz}(tz)$, y por consiguiente

$$f(tz) - T_x(tz) \geq f(tz) - T_x(tz) - T_{tz}(tz) \geq 0.$$

Luego, si $t = 1$, se tiene que

$$f(z) - T_x(z) \geq 0,$$

por consiguiente, se tiene que $f(z) \geq T_x(z)$.

Por otro lado, el caso $t = -1$ implica que

$$-f(z) + T_x(z) = f(-z) - T_x(-z) \geq 0,$$

es decir, $T_x(z) \geq f(z)$ y se tiene que $T_x(z) = f(z)$ para todo $z \in E$, es decir, $T_x = f$, lo cual implica que $(x, f) \in \mathcal{G}(T)$, luego, $\mathcal{G}(T)$ es cerrado, por lo que se tiene $T \in \mathcal{L}(E, E^\star)$. □

Ejercicio 5

Sean $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach. Supongamos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es tal que $T(E)$ es cerrado y $\dim(\ker T) < +\infty$. Supongamos que $||\cdot||$ es otra norma en E tal que existe $M > 0$ con $||x|| \leq M||x||_E$ para todo $x \in E$.

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||x||_E \leq C(||T(x)||_F + ||x||) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demostración. Consideremos el subespacio $V := F(E)$ y restrinjamos el codominio de T a V, es decir, $T : E \to V$, lo cual implica que T es subreyectiva. Sin pérdida de generalidad, supondremos tal hecho, es decir, T es sobre.

Si demostramos lo que queremos por contradicción, tenemos que suponer que para todo $\varepsilon > 0$ existe $v_\varepsilon \in E$ tal que

$$||v_\varepsilon||_E > \varepsilon(||T(v_\varepsilon)||_F + ||v_\varepsilon||)$$

Entonces, si $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$||v_n||_E > n(||T(v_n)||_F + ||v_n||).$$

Luego, al considerar $x_n := \frac{v_n}{||v_n||_E}$, se verifica

$$1 = ||x_n||_E > n(||T(x_n)||_F + ||x_n||).$$

lo cual deduce la existencia de una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con

$$1 = ||x_n||_E \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} > ||T(x_n)||_F + ||x_n||.$$

Sin embargo, dado que T es sobreyectiva, existe $c > 0$ con la propiedad $B_F(0, c) \subseteq T(B_E(0, 1))$. Notemos que

$$||T(x_n)||_F \leq ||T(x_n)||_F + ||x_n|| < \frac{1}{n},$$

y además,

$$||T(cnx_n)||_F = cn||T(x_n)||_F < \frac{cn}{n} = c,,$$

es decir, $T(cnx_n) \in B_F(0, c) \subseteq T(B_E(0, 1))$, lo cual implica la existencia de $w_n \in B_E(0, 1)$ con $T(cnx_n) = T(w_n)$ lo cual implica que al escojer $y_n = \frac{w_n}{cn}$, se tiene que

$$||y_n||_E = \frac{||w_n||_E}{cn} < \frac{1}{cn}$$

y

$$T(y_n) = \frac{1}{cn} T(w_n) = \frac{1}{cn} T(cnx_n) = T(x_n),$$

es decir, existe $y_n \in E$ tal que

$$||y_n||_E < \frac{1}{cn} \quad \text{y} \quad T(y_n) = T(x_n).$$

Es decir, $T(y_n - x_n) = 0$ y por ende, $x_n = y_n + z_n$ donde $z_n \in \ker T$. Como $||y_n||_E < \frac{1}{cn}$, se tiene que $y_n \to 0$. Por ende,

$$\begin{aligned} x_n = y_n + z_n \quad &\implies \quad 1 = ||x_n||_E = ||y_n + z_n||_E \\ &\implies \quad 1 = \lim_{n\to+\infty} ||x_n||_E = \left|\left| \lim_{n\to+\infty} y_n + z_n \right|\right| = \left|\left| \lim_{n\to+\infty} z_n \right|\right| = \lim_{n\to+\infty} ||z_n||, \end{aligned}$$

es decir, $||z_n||_E \to 1$.

Recordemos además, que $||x_n|| \leq ||T(x_n)||_F + ||x_n|| < \frac{1}{n}$, lo cual implica que $||x_n|| < \frac{1}{n}$.

Por ende, dado que como existe $M > 0$ con $||u|| \leq M||u||_E$ para todo $u \in E$, se tiene que

$$||z_n|| = ||x_n - y_n|| \leq ||x_n|| + ||y_n|| < \frac{1}{n} + ||y_n|| \leq \frac{1}{n} + M||y_n||_E < \left\{\frac{1}{c} + M\right\}\frac{1}{n}$$

y por ende, $||z_n|| \to 0$. Ahora, como $\ker T$ es finito dimensional, se tiene que $||\cdot||$ y $||\cdot||_E$ son equivalentes en $\ker T$, es decir, existe $K_1, K_2 > 0$ tales que

$$K_1||z|| \leq ||z||_E \leq K_2||z|| \quad \text{para todo } z \in \ker T$$

lo cual implica que en particular, $||z_n||_E \leq K||z_n||$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por la cota $||z_n|| < \left\{\frac{1}{c} + M\right\}\frac{1}{n}$, se tiene que $||z_n||_E \to 0$ y esto contradice lo que establecimos previamente con $||z_n||_E \to 1$.

De este modo, existe $C > 0$ con $||x||_E \leq C(||T(x)||_F + ||x||)$ y se concluye la demostración. $\square$

Ejercicio 6

Sena $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach y consideremos una función $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sobreyectiva. Demuestre que si M es un subespacio de E, $T(M)$ es cerrado en F si y sólo si $M + \ker T$ es cerrado en E.

Demostración. Para demostrar esta afirmación, partamos probando que

$$T^{-1}(T(M)) = M + \ker T.$$

En efecto, si $z \in T^{-1}(T(M))$ entonces, $0_E \in \ker T$ y de este modo, $z = z + 0 \in M + \ker T$. conversamente, si suponemos que $z \in M + \ker T$, existen $x \in M$ e $y \in \ker T$ con $z = x + y$, de este modo, se tiene que $T(z) = T(x) + T(y) = T(x) \in T(M)$, de modo que $z \in T^{-1}(T(M))$.

Supongamos que $T(M)$ es cerrado. Recordemos que si T es continua, se tiene que $T^{-1}(A)$ es abierto en E para todo subconjunto A abierto en F. Por otro lado, la propiedad $T^{-1}(A^c) = [T^{-1}(A)]$ implica que la pre-imagen de conjuntos cerrados en F son conjuntos cerrados en E. De este modo, si $T(M)$ es cerrado, se tiene que $M + \ker T = T^{-1}(T(M))$ es cerrado en E.

Conversamente, dado que T es continuo y $M + \ker T$ es cerrado, se tiene que $T(\{M + \ker T\}^c)$ es abierto en virtud del Teorema de la función abierta. Más aún, se puede probar que

$$T(M) = T(M + \ker T),$$

en efecto, si $y \in T(M)$, existe $x \in M$ con $T(x) = y$, luego, $x \in M \subseteq M + \ker T$, de modo que $y = T(x) \in T(M + \ker T)$. Ahora, si suponemos que $y \in T(M + \ker T)$, existe $x \in M$ y $w \in \ker T$ con $T(x + w) = y$, sin embargo,

$$T(x) = T(x) + 0 = T(x) + T(w) = T(x + w) = y$$

lo cual demuestra que $y \in T(M)$. De este modo, se tiene que $T(M) = T(M + \ker T)$ y por ende,

$$\{T(M + \ker T)\}^c = T(\{M + \ker T\}^c) = [T(M)]^c$$

es abierto, o equivalentemente, $T(M)$ es cerrado y se concluye la demostración. $\square$

Ejercicio 7

Sea $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$-e.n.v y M un subespacio de E cerrado. En álgebra lineal se puede demostrar la existencia de un espacio vectorial cociente E/M definido por

$$E/M := \{x + M \colon x \in E\}$$

siendo

$$x + M = [x] = \{x + m \colon m \in M\} = \{y \in E \colon x - y \in M\}.$$

Recordemos que E/M es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones

$$[x] + [y] := [x + y] \quad \text{y} \quad \lambda[x] := [\lambda x] \quad \text{para todo } x, y \in E \text{ y todo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Demuestre que el espacio E/M es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado con la norma

$$\begin{array}{rcl} ||\cdot||_{E/M} : E/M & \to & \mathbb{R} \\ x+M & \mapsto & \inf\limits_{m\in M} ||x-m||. \end{array}$$

Demostración. Para demostrar esto, tenemos que demostrar los siguientes puntos,

(a) $||\cdot||_{E/M}$ **está bien definido,** es decir, si $x, y \in E$ son tales que $[x] = [y]$, entonces, $||[x]||_{E/M} = ||[y]||_{E/M}$.

(b) **Positividad,** es decir, $||[x]||_{E/M} \geq 0$ para todo $[x] \in E/M$ y

$$||[x]||_{E/M} = 0 \iff [x] = 0$$

(c) **Homogeneidad** $||\lambda[x]||_{E/M} = |\lambda| \, ||[x]||_{E/M}$ para todo $[x] \in E/M$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) **Desigualdad Triangular,** $||[x]+[y]||_{E/M} \leq ||[x]||_{E/M} + ||[y]||_{E/M}$ para todo $[x], [y] \in E/M$.

los cuales dividirán la demostración en cuatro partes:

Parte 1: $||\cdot||_{E/M}$ **está bien definido.**

Sean $x, y \in E$ con $[x] = [y]$, es decir, se tiene que $x - y \in M$ y por ende, existe $m_0 \in M$ con $x = y + m_0$, luego,

$$||x||_{E/M} = \inf_{m\in M} ||x-m|| = \inf_{m\in M} ||y+m_0-m|| = \inf_{m'\in M} ||y-m'|| = ||[y]||_{E/M},$$

es decir, $||\cdot||_{E/M}$ está bien definida.

Parte 2: Positividad de $||\cdot||_{E/M}$**.**

Consideremos $x \in E$, entonces, como $||\cdot||$ es no negativa, se tiene que

$$||x-m|| \geq 0 \quad \text{para todo } m \in M$$

luego, 0 es cota inferior de $\{||x-m|| \colon m \in M\}$, de este modo, se tiene que

$$0 \leq \inf_{m\in M} ||x-m|| = ||[x]||_{E/M}$$

lo cual prueba que $||[x]||_{E/M} \geq 0$ para todo $[x] \in E/M$. Por otro lado,

$$0 = ||[x]||_{E/M} = \inf_{m\in M} ||x-m|| \iff x \in \overline{M} = M \iff [x] = 0,$$

lo cual prueba la positividad de $||\cdot||_{E/M}$.

Parte 3: Homogeneidad de $||\cdot||_{E/M}$**.**

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, si suponemos que $\lambda = 0$, entonces, $[\lambda x] = [0]$ y por ende,

$$||[\lambda x]||_{E/M} = ||[0]||_{E/M} = 0 = |\lambda| \, ||[x]||_{E/M}$$

Sin embargo, si $\lambda \neq 0$, se tiene $m \in E$ si y sólo si $\lambda m \in M$. Por ende, para todo $[x] \in E/M$

$$||[\lambda x]||_{E/M} = \inf_{m\in M} ||\lambda x - m|| = \inf_{m\in M} ||\lambda(x-m)|| = \inf_{m\in M} |\lambda| \, ||x-m|| = |\lambda| \inf_{m\in M} ||x-m|| = |\lambda| \, ||[x]||_{E/M}$$

lo cual demuestra que $||[\lambda x]||_{E/M} = |\lambda| \, ||[x]||_{E/M}$ para todo $[x] \in E/M$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Parte 4: Desigualdad Triangular.

Sean $x, y \in E$, se tiene que para todo $m \in M$ se verifica

$$||[x+y]||_{E/M} \leq ||x+y-2m|| \leq ||x-m|| + ||y-m||,$$

de este modo, se verifica que

$$||[x+y]||_{E/M} \leq ||x-m|| + ||y-m|| \quad \text{para todo } m \in M.$$

Entonces, $||[x+y]||_{E/M}$ es una cota inferior del conjunto

$$\{||x-m|| + ||y-m|| \colon m \in M\}$$

lo cual demuestra que

$$\begin{array}{rcl} ||[x+y]||_{E/M} & \leq & \inf\{||x-m|| + ||y-m|| \colon m \in M\} \\ & = & \inf\{||x-m||\} + \inf\{||y-m|| \colon m \in M\} = ||[x]||_{E/M} + ||[y]||_{E/M}, \end{array}$$

es decir, $||\cdot||_{E/M}$ satisface la desigualdad triangular, lo cual prueba que $(E/M, ||\cdot||_{E/M})$ es un $\mathbb{R}$-e.v.n. $\square$

En el libro de Brezis (Proposición 11.8, pagina 353 de la versión americana/Springer) establece que el cociente E/M es un $\mathbb{R}$-espacio de Banach cuando E lo es y M es cerrado. Este resultado se asumirá y será útil en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 8

Sea $T : E \to F$ un operador lineal acotado entre dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$. Demuestre que $T(E)$ es cerrado en F si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\inf_{m\in\ker T} ||u-m||_E \leq C||T(u)||_F \quad \text{para todo } u \in E.$$

Demostración. Primero que todo, demostremos que $\ker T$ es cerrado, en efecto, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\ker T$ con $x_n \to x$, se tiene que

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} T(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0,$$

lo cual implica que $\ker T$ es cerrado. Definamos así el espacio cociente

$$E/N \quad \text{con } N := \ker T.$$

el cual es un espacio vectorial normado con

$$||[u]||_{E/N} := \inf_{m\in N} ||u-m||_E = \inf_{m\in\ker T} ||u-m||_E.$$

Considere además, la proyección canónica $\pi : E \to E/N$ con $\pi(x) = [x]$.

Por otro lado, definamos $\tilde{T} : E/N \to F$ con $\tilde{T}([x]) = T(x)$. $\tilde{T}$ está bien definida y es lineal, en efecto, si $x, y \in E$ con $[x] = [y]$, existe $m \in N = \ker T$ con $x = y + m$ y por ende,

$$\tilde{T}([x]) = T(x) = T(y+m) = T(y) + T(m) = T(y) = T([y]).$$

La linealidad es una consecuencia directa de la definición de $\tilde{T}$. Más aún, se verifica que

$$T(x) = \tilde{T}([x]) = \tilde{T}(\pi(x)) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\tilde{T}([x]) = T(x) = T(x-m) \quad \text{para todo } m \in \ker T = N,$$

y como $T \in \mathcal{L}(E, F)$, se tiene que

$$||\tilde{T}([x])||_F = ||T(x-m)||_F \leq ||T||_{\mathcal{L}(E,F)} \, ||x-m||_E \quad \text{para todo } m \in \ker T,$$

lo cual demuestra que $||\tilde{T}([x])||_F$ es cota inferior de

$$\{||T||_{\mathcal{L}(E,F)}||x-m||_E \colon m \in N\}$$

entonces,

$$||\tilde{T}([x])||_F \leq \inf\{||T||_{\mathcal{L}(E,F)}||x-m||_E \colon m \in N\} = ||T||_{\mathcal{L}(E,F)} \inf\{||x-m||_E \colon m \in N\} = ||T||_{\mathcal{L}(E,F)} \, ||[x]||_{E/N}.$$

lo cual implica que $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E/N, F)$.

Además, si $\tilde{T}([x]) = 0$, se verifica que $T(x) = 0$ y por ende, $x \in \ker T$, es decir, $[x] = 0$, lo cual implica que $\tilde{T}$ es inyectivo.

Por otro lado, $y \in T(E)$, si y sólo si se tiene que existe $x \in E$ con $T(x) = y$, y eso a su vez equivale a $\tilde{T}([x]) = y$ y por ende, $y \in T(E)$ si y sólo si $y \in \tilde{T}(E/N)$ y por ende, $T(E) = \tilde{T}(E/N)$.

De este modo, se tiene que $\tilde{T}(E/N)$ es cerrado en F y por ende, $\tilde{T}(E/N)$ es un $\mathbb{R}$-espacio de Banach y existe una función $S : E/N \to \tilde{T}(E/N)$ que es un isomorfismo entre $\mathbb{R}$-espacios de Banach, el cual está definido por $S([x]) = \tilde{T}([x])$, pues, es inyectiva por ser igual a $\tilde{T}$ y es sobreyectiva por contrucción.

Además, S es continua por ser $\tilde{T}$ continua. Por ende, el corolario al Teorema de la función abierta establece que S^{-1} es continua, es decir, existe $C > 0$ con

$$||S^{-1}(y)||_{E/N} \leq C||y|| \quad \text{para todo } y \in \tilde{T}(E/N)$$

luego, si $[x] \in E/N$, se tiene que $S([x]) = \tilde{T}([x]) \in \tilde{T}(E/N)$ y por ende, la identidad $\tilde{T}([x]) = T(x)$ implica

$$||[x]||_{E/N} = ||S^{-1}(S([x]))||_{E/N} \leq C||\tilde{T}([x])||_F = C||T(x)||_F,$$

es decir

$$\inf_{m\in\ker T} ||x-m|| = ||[x]||_{E/N} \leq C||\tilde{T}([x])||_F = C||T(x)||_F \quad \text{para todo } x \in E$$

lo cual prueba lo que se quería. $\square$

Ejercicio 9

Sean $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach y consideremos $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Asuma que $T(E)$ tiene un espacio suplementario de dimensión finita, es decir, existe $G \subseteq F$ con $\dim_{\mathbb{R}} G < +\infty$,

$$F = T(E) + G \quad \text{y} \quad T(E) \cap G = \{0\}.$$

Demuestre que $T(E)$ es cerrado en F.

Demostración. Sea $X := E \times G$. $(X, ||\cdot||_X)$. Como G es de dimensión finita, se tiene que G es cerrado en F, o equivalentemente, $(G, ||\cdot||_F)$ es un espacio de Banach, por ende, $(X, ||\cdot||_X)$ es un espacio de Banach donde

$$||(x,y)||_X = ||x||_E + ||y||_F.$$

Considere el operador $S : X \to F$ con

$$S(x,y) = T(x) + y.$$

El cual verifica

$$||S(x,y)||_F = ||T(x) + y||_F \le ||T(x)||_F + ||y||_F \le L(||x||_E + ||y||_F) = L||(x,y)||_X$$

donde $L = \max\{1, ||T||_{\mathcal{L}(E,F)}\} > 0$. Es lineal, pues, si $(x,y), (a,b) \in E \times G$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$S((x,y) + \lambda(a,b)) = S(x + \lambda a, y + \lambda b) = T(x + \lambda a) + y + \lambda b = T(x) + y + \lambda[T(a) + b] = S(x,y) + \lambda S(a,b)$$

lo cual prueba que $S \in \mathcal{L}(X, F)$.

Por otro lado, se tiene que S es sobreyectiva, pues, si $u \in F$, existen $x \in E$ e $y \in G$ tales que $S(x,y) = T(x) + y = u$.

Luego, el Teorema de la función abierta establece que $S(E \times [X \setminus \{0\}])$ es abierto en F, pues, $E \times [X \setminus \{0\}]$ lo es en $E \times X$.

Además, se tiene que $S(E \times [X \setminus \{0\}]) = T(E) + [X \setminus \{0\}]$, pues, si $u \in S(E \times [X \setminus \{0\}])$, entonces, existe $x \in E$ e $y \in X \setminus \{0\}$ con $u = T(x) + y$, es decir, $u \in T(E) + [X \setminus \{0\}]$. Por otro lado, si $u \in T(E) + [X \setminus \{0\}]$, existe $v \in T(E)$ y $w \in X \setminus \{0\}$ con $u = v + w$, Sin embargo, como $v \in T(E)$, existe $x \in E$ con $T(x) = v$ y por ende, $u = T(x) + y = S(x,y)$ y como $y \in X \setminus \{0\}$, se tiene que $u \in S(E \times [X \setminus \{0\}])$.

Por último, se tiene que $\{T(E) + [X \setminus \{0\}]\}^c = T(E)$, pues, si $u \in \{T(E) + [X \setminus \{0\}]\}^c$, entonces, se tiene que $u = T(x) + y$ con $y \in X$ y $x \in E$, de este modo, si $y \neq 0$, se verifica $u \in \{T(E) + [X \setminus \{0\}]\}^c$ lo cual es contradictorio. Luego, se tiene que $y = 0$ y por ende, $u = T(x) \in T(E)$.

Por otro lado, si $u \in T(E)$, existe $x \in E$ con $u = T(x)$. Por otro lado, $u = v + w$ con $w \in X$. De este modo, $T(x) = u = v + w$ y por ende, $w = T(x) - v \in T(E) \cap X = \{0\}$ y por ende, $w = 0$ y por ende, $u \in \{T(E) + [X \setminus \{0\}]\}^c$. De este modo, se tiene que $\{T(E) + [X \setminus \{0\}]\}^c = T(E)$ y dado que $T(E) + [X \setminus \{0\}]$ es abierto en F, se tiene que, su complemento, $T(E)$ es cerrado en E. $\square$