SOLUCIONARIO CONTROL 1 - ANÁLISIS II POSTGRADO

PROF: GONZALO ROBLEDO VELOSO. AYT: DAVID URRUTIA VERGARA

Notación: La nomenclatura **e.v.n** hará alusión a un $\mathbb{R}-$espacio vectorial normado.

INSTRUCCIONES: Por favor, resuelva 2 preguntas, donde la primera es obligatoria mientras que la pregunta restante debe ser escogida entre los ejercicios 2 y 3.

1.- Sea $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}-$e.v.n. Sea C un subconjunto abierto y convexo de E con $0 \in C$. Recordemos que el calibre de C es el funcional $p : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$p(x) := \inf\{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1}x \in C\}.$$

Asuma que $C = -C$[1] y que C es acotado. Demuestre que p es una norma, además, demuestre que p es equivalente a la norma $||\cdot||$.

2.- Sea $E := \mathbb{R}[x]$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales (y variable x) dotado de la norma $||p|| = \sup\limits_{x\in[0,2]} |p(x)|$. Demuestre que la transformación lineal $T\colon (\mathbb{R}[x], ||\cdot||) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $T(p) = p(2)$ es continua. ¿Cuánto vale $||T||_{E^\star}$?.

3.- Considere $n \in \mathbb{N}$ y un espacio vectorial E de dimensión n, suponga que $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E y asuma que $||\cdot||_2$ es una norma en E, el cual se define como

$$||x||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

siendo $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ y cada tuplo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $p \geq 1$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Calcule explícitamente $||f||_{E^\star}$ en términos de $f_i := f(e_i)$.

Observaciones de la corrección

Como se anticipó en el enunciado, sólo se corregirán dos preguntas, la pregunta 1 y la pregunta que hayan escogido entre las preguntas 2 y 3. En caso de resolver las tres preguntas, se considerarán la pregunta 1 y la mejor entre la 2 y la 3.

Cada pregunta será corregida con nota (de 1.0 a 7.0) y la nota final del control será el promedio de las dos preguntas a corregir indicadas en el párrafo anterior.

La resolución de cada pregunta tendrá una rúbrica y variará acorde la naturaleza del ejercicio en cuestión.

Soluciones.

Ejercicio 1. **Rúbrica:** La corrección constará de cuatro items para este ejercicio, al responder correctamente cada uno de estos item, tendrá los puntajes detallados a continuación

(i) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$ y $p(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$: 1.5p
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $x \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$: 1.5p
(iii) Desigualdad Triangular: 1.5p
(iv) p es equivalente a $||\cdot||$: 1.5p

Solución: La idea de este ejercicio es usar el siguiente Lema:

Lema 1. *Si $p : E \to \mathbb{R}$ es el calibre de C, p es un funcional sublineal el cual verifica la existencia de $M > 0$ con $0 \leq p(x) \leq M||x||$ para todo $x \in E$ y C verifica la igualdad*

$$C = \{x \in E \colon p(x) < 1\}.$$

Entonces, por dicho resultado, tenemos que p es un funcional sublineal de E, lo cual es equivalente a

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{y} \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \text{para todo } x, y \in E \text{ y cada } \lambda > 0.$$

Entonces, de la desigualdad del lado izquierdo obtenemos la desigualdad triangular inmediatamente.

[1] Si E es un espacio vectorial y $C \subseteq E$ (ojo, no necesariamente estamos hablando de un subespacio, es sólo un subconjunto), el conjunto $-C$ corresponde a los inversos de C, es decir, $-C := \{-x \colon x \in C\}$.

Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ o $\lambda = 0$. Este último caso implica que $\lambda = |\lambda|$ y $\lambda x = 0$ y por ende

$$0 \leq p(\lambda x) \leq M||\lambda x|| = 0,$$

es decir, $p(\lambda x) = 0 = |\lambda| p(x)$.

Si $\lambda > 0$, se tiene inmediatamente que $p(\lambda x) = \lambda p(x) = |\lambda| p(x)$.

Para el caso $\lambda < 0$, partamos considerando $\lambda = -1$. Por un lado, se tiene que

$$p(-x) = \inf\{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1} x \in C\}.$$

Entonces, la identidad $C = -C$ implica que si $\alpha^{-1}x \in C$, se tiene que $\alpha^{-1}(-x) = -\alpha^{-1}x \in C$. Recíprocamente, si $\alpha > 0$ es tal que $-\alpha^{-1}x = \alpha^{-1}(-x) \in C$, se tiene que $\alpha^{-1}x \in C$, es decir, tenemos la igualdad de conjuntos

$$\{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1}x \in C\} = \{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1}(-x) \in C\},$$

y por ende,

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1}x \in C\} = \inf\{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1}(-x) \in C\} = p(-x),$$

lo cual demuestra que $p(-x) = |-1| p(x)$ para todo $x \in E$. Entonces, si $\lambda < 0$, se tiene $|\lambda| = -\lambda > 0$, lo cual implica que $p(\lambda x) = p(-\lambda x) = -\lambda p(x) = |\lambda| p(x)$.

Ahora, otra consecuencia del Lema anterior es que $0 \leq p(x) \leq M||x||$ para todo $x \in E$, en particular se tiene que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$.

Entonces, para demostrar que p es una norma, sólo nos falta verificar que $p(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por $0 \leq p(x) \leq M||x||$, tenemos que $p(0) = 0$ y por consiguiente, si $x = 0$, se verifica $p(x) = 0$. Para demostrar el converso, la hipótesis de acotamiento de C equivale a la existencia de $L > 0$ tal que

$$||x|| \leq L \quad \text{para todo } x \in C,$$

entonces, recordemos que

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1}x \in C\},$$

de modo que si $\alpha > 0$ con $\alpha^{-1}x \in C$, entonces,

$$\left|\left|\alpha^{-1}x\right|\right| \leq L,$$

entonces,

$$||x|| \leq L\alpha$$

y esto es para todo $\alpha > 0$ con $\alpha^{-1}x \in C$, entonces,

$$||x|| \leq Lp(x)$$

y por ende, si $x \in E$ es tal que $p(x) = 0$, la desigualdad previa establece que $||x|| = 0$ y por ende, $x = 0$. Luego, p es una norma.

Para demostrar la equivalencia, recordemos que $p(x) \leq M||x||$ y gracias a lo realizado previamente, tenemos que $||x|| \leq Lp(x)$, lo cual se traduce en

$$\frac{1}{L}||x|| \leq p(x) \leq M||x|| \quad \text{para todo } x \in E$$

lo cual demuestra la equivalencia entre $||\cdot||$ y p. □

Ejercicio 2. **Rúbrica:** La corrección constará de tres ítems para este ejercicio, al responder correctamente cada uno de estos ítem, tendrá los puntajes detallados a continuación

(i) Linealidad de T: 2p
(ii) Continuidad de T: 2p
(iii) Hallar explícitamente el valor de $||T||_{E^\star}$: 2p

Solución:

Notemos que T es lineal, pues, para todo $p, q \in \mathbb{R}[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica

$$T(p + \lambda q) = (p + \lambda q)(2) = p(2) + \lambda q(2) = T(p) + \lambda T(q).$$

Más aún, considerando $M = 1$, tenemos que si $p \in \mathbb{R}[x]$, se verifica

$$|T(p)| = |p(2)| \leq \max\{|p(x)| \colon x \in [0, 2]\} = ||p|| = M||p||,$$

lo cual implica que T es un funcional lineal continuo de $\mathbb{R}[x]$.

Para calcular $||T||_{E^\star}$, notemos que del cálculo anterior, se tiene que para todo $p \in \mathbb{R}[x]$ con $||p|| = 1$, se verifica

$$|T(p)| \leq ||p|| = 1,$$

lo cual implica que
$$||T||_{E^\star} = \inf\{|T(p)| \colon p \in \mathbb{R}[x] \text{ y } ||p|| = 1\} \leq 1.$$
Por otro lado, al considerar $p(x) = 1$ para todo $x \in [0,2]$, se tiene que $p \in \mathbb{R}[x]$ y verifica
$$|T(p)| = |p(2)| = 1 \quad \text{y} \quad ||p|| = \sup_{x\in[0,2]} |p(x)| = \sup_{x\in[0,2]} 1 = 1,$$
es decir,
$$1 = |T(p)| \leq \sup\{|T(p)| \colon p \in \mathbb{R}[x] \text{ y } ||p|| = 1\} = ||T||_{E^\star} \leq 1,$$
y por ende, $||T||_{E^\star} = 1$. □

Ejercicio 3. Solución:
Demostraremos que
$$||f||_{E^\star} = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}.$$
con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pero antes de arrancar con la demostración, detallaré la rúbrica de corrección para esta pregunta.

Rúbrica: La corrección constará de cinco ítems para este ejercicio, al responder correctamente cada uno de estos ítem, tendrá los puntajes detallados a continuación

(i) Análisis del caso $f = 0$: 1.2p
(ii) Demostrar adecuadamente que $||f||_{E^\star} \leq \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}$: 1.2p
(ii) Demostrar que si $f \neq 0$, entonces, $f(e_i) \neq 0$ para cierto $i \in \{1, \ldots, n\}$: 1.2p
(iv) Dar con un posible candidato de $x \in E$ con $||x|| = 1$ y $f(x) = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}$: 1.2p
(v) Demostrar adecuadamente que $||f||_{E^\star} \geq \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}$: 1.2p

Si $f = 0$, entonces, $f(e_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y además,
$$||f||_{E^\star} = 0 = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}.$$
Si $f \neq 0$ y $x \in E$ con $||x||_q = 1$, la desigualdad de Hölder junto con $f_i = f(e_i)$ establecen que
$$|f(x)| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|f_i| \leq \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}$$
y por ende,
$$||f||_{E^\star} = \sup_{||x||=1} |f(x)| \leq \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}.$$
Por otro lado, dado que $f \neq 0$, existe $x \neq 0$ con $f(x) \neq 0$, siendo $x = r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n$ con $\{r_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, $f_{i_0} \neq 0$ para cierto i_0, pues, si suponemos lo contrario, es decir, $f_i = 0$ para todo i, se tiene que
$$f(x) = f(r_1e_1 + r_2e_2 + \cdots + r_ne_n) = r_1 f_1 + r_2 f_2 + \cdots + r_n f_n = 0$$
lo cual contradice que $f(x) \neq 0$. De este modo, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \neq 0$ y por ende, podemos escoger el vector
$$x_0 = \mathrm{Sgn}(f_1)\left[\frac{|f_1|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} e_1 + \mathrm{Sgn}(f_2)\left[\frac{|f_2|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} e_2 + \cdots + \mathrm{Sgn}(f_n)\left[\frac{|f_n|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} e_n,$$
siendo $\mathrm{Sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$\mathrm{Sgn}(u) := \begin{cases} 1 & u \geq 0 \\ -1 & u < 0. \end{cases}$$
Luego, dado que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se verifica que $q = \frac{p}{p-1}$ y por ende,
$$||x_0|| = \left(\sum_{\ell=1}^{n}\left[\frac{|f_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{p\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

í

Además, dadas las identidades $|u| = (\mathrm{Sgn}(u))u$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\mathrm{Sgn}(f_1)\left[\frac{|f_1|}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} e_1 + \mathrm{Sgn}(f_2)\left[\frac{|f_2|}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} e_2 + \cdots + \mathrm{Sgn}(f_n)\left[\frac{|f_n|}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} e_n\right) \\ &= \mathrm{Sgn}(f_1)\left[\frac{|f_1|}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} f(e_1) + \mathrm{Sgn}(f_2)\left[\frac{|f_2|}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} f(e_2) + \cdots + \mathrm{Sgn}(f_n)\left[\frac{|f_n|}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{q}{p}} f(e_n) \\ &= \frac{|f_1|^{\frac{q}{p}+1}}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{p}}} + \frac{|f_2|^{\frac{q}{p}+1}}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{p}}} + \cdots + \frac{|f_n|^{\frac{q}{p}+1}}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\sum_{i=1}^n |f_i|^q}{(\sum_{i=1}^n |f_i|^q)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = f(x) = |f(x)| \leq \sup_{||x||=1} |f(x)| = ||f||_{E^\star} \leq \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

lo cual demuestra lo que se quería. $\square$