AYUDANTÍA 2 - ANÁLISIS II POSTGRADO

DAVID IGNACIO URRUTIA VERGARA

Notación: La nomenclatura **e.v.n** hará alusión a un $\mathbb{R}-$espacio vectorial normado.

En las distintas ediciones del libro de Brezis, se usan distintas notaciones para referirse al dual topológico de E, en efecto, mientras que la edición de Springer usa la notación $E^\star$, la edición francesa usa la notación E' para referirse a dicho dual. Para despejar dudas, ambas notaciones serán igual de válidas.

Problema 1

Sea $\mathbb{R}[x]$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de los polinomios en la variable x con coeficientes reales dotado de la norma $||p|| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |p(x)|$. Demuestre que la transformación lineal $T\colon (\mathbb{R}[x], ||\cdot||) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $T(p) = p(2)$ no es continua en $0 \in \mathbb{R}[x]$ (el polinomio idénticamente nulo).

Demostración. Supongamos que si es continua en 0, entonces, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||p|| < \delta \implies |p(2)| < \frac{1}{2}$$

Por otro lado, como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N_0}} < \delta$, dicho esto, consideremos $p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{N_0}$. Entonces, tenemos que $x \mapsto p(x)$ es creciente (pues, $p'(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$), de modo que

$$||p|| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)| = |p(1)| = \frac{1}{2^{N_0}} < \delta.$$

Además, notemos lo siguiente,

$$|f(p) - f(0)| = |p(2)| = \left(\frac{2}{2}\right)^{N_0} = 1 \geq \frac{1}{2},$$

lo cual implica una contradicción. Ésto prueba que f no es un funcional lineal continuo en 0. $\square$

Problema 2

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, consideremos

$$E = \ell^\infty(\mathbb{K}) := \{u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}\colon \text{ existe } M > 0 \text{ con } |u_n| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Demuestre que la función $f : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(u) = \limsup_{n\to+\infty} u_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sup_{k\geq n} u_k\right\}$$

define un funcional sublineal de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Observación: El espacio $\ell^\infty(\mathbb{K})$ es un espacio de Banach con la norma

$$||u||_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|.$$

Demostración. Demostremos primeramente que está bien definido. Si $u \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$u_k \leq |u_k| \leq ||u||_\infty \quad \text{para todo } k \geq n,$$

entonces,

$$\sup_{k\geq n} u_k \leq ||u||_\infty$$

de este modo,

$$f(u) = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} u_k\right) \leq \sup_{k\geq n} u_k = ||u||_\infty < +\infty.$$

Entonces, f está bien definido.

Por un lado, si $\lambda > 0$ y $x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, se verifica la igualdad

$$f(\lambda x) = \limsup_{n\to+\infty} \lambda x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} \lambda x_k \right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda \left(\sup_{k\geq n} x_k \right) = \lambda \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} x_k \right) = \lambda \limsup_{n\to+\infty} x_n = \lambda f(x).$$

Además, si $x, y \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que

$$x_k \leq \sup_{k\geq n} x_k \quad \text{e} \quad y_k \leq \sup_{k\geq n} y_k,$$

lo cual implica que $x_k + y_k \leq \sup_{k\geq n} x_k + \sup_{k\geq n} y_k$ para todo $k \geq n$. Luego,

$$\sup_{k\geq n}(x_k + y_k) \leq \sup_{k\geq n} x_k + \sup_{k\geq n} y_k,$$

luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n}(x_k + y_k) \right) \leq \sup_{k\geq n} x_k + \sup_{k\geq n} y_k,$$

y dada la propiedad $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$, se verifica

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \limsup_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n}(x_k + y_k) \right) \\ &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{k\geq n} x_k + \sup_{k\geq n} y_k \right\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{k\geq n} x_k \right\} + \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{k\geq n} y_k \right\} \\ &= \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que f es un funcional sublineal de $\ell^\infty(\mathbb{R})$. □

Problema 3

Considere el $\mathbb{R}$-espacio vectorial

$$E := \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \colon \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\}$$

con la norma $||\cdot|| : E \to [0, +\infty]$ definida por

$$||x|| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}.$$

Defina $f : E \to \mathbb{R}$ como

$$u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto f(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{2^n}.$$

Compruebe que f es un funcional lineal continua (i.e $f \in E^\star$) y calcule $||f||_{E^\star}$. ¿Existe $u \in E$ con $||u|| = 1$ y $f(u) = ||f||_{E^\star}$?.

Demostración. Demostremos primeramente que f está bien definida. Es decir, que para cada $u \in E$ se tiene que $|f(u)| < +\infty$. En efecto,

$$|f(u)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{u_n}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{||u||}{2^n} = ||u|| < +\infty \tag{1}$$

Segundo, si $u, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, notemos que

$$f(u + \lambda v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{u_n}{2^n} + \lambda \frac{v_n}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{2^n} = f(u) + \lambda f(v).$$

Lo cual demuestra que f es un funcional lineal de E. Por último, una lectura cuidadosa de (1) nos hace notar que $|f(u)| \leq ||u||$ para todo $u \in E$. Entonces, al considerar $L = 1$, se tiene que $|f(u)| \leq L||u||$ para todo $u \in E$ lo cual equivale a que $f \in E^\star$.

Por otro lado, tenemos que $|f(u)| \leq 1$ para todo $u \in E$ con $||u|| = 1$ lo cual implica que $||f||_{E^\star} \leq 1$. Más aún, al considerar $u_k = \{u_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}}$n definida por

$$u_n(k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k, \end{cases}$$

tenemos que u_k es el vector donde es cero en todos lados salvo en la entrada $k-$ésima, en la cual, tiene como entrada 1, entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $||u_k|| = 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(k) = 0$$

y además,

$$f(u_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(k)}{2^n} = \frac{1}{2^k}.$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^k} = |f(u_k)| \leq \sup\{|f(u)|\colon u \in E \text{ y } ||u|| = 1\} = ||f||_{E^\star}$$

entonces,

$$1 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = |f(u_k)| \leq \sup\{|f(u)|\colon u \in E \text{ y } ||u|| = 1\} = ||f||_{E^\star}$$

y por ende, $||f||_{E^\star} = 1$.

Con respecto a la pregunta planteada, supongamos que existe $u \in E$ con $||u|| = 1$ y $f(u) = ||f||_{E^\star}$, es decir,

$$f(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{2^n} = ||f||_{E^\star} = 1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = ||u||,$$

lo cual implica que

$$-1 \leq u_n \leq 1,$$

lo cual implica que $|1 - u_n| = 0$ y por ende,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|1 - u_n|}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1 - u_n}{2^n} = 1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{2^n} = 0.$$

Por otro lado, podemos asumir del curso de Análisis 1 de posgrado que si $\mu_C : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ es la medida del conteo, entonces, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ es un espacio de medida con

$$\int_{\mathbb{N}} u(n) \, d\mu_c(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n)$$

para cualquier función $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. De este modo, tenemos que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|1 - u_n|}{2^n} = 0 \implies \frac{|1 - u_n|}{2^n} = 0 \quad \mu_c - \text{c.t.p en } \mathbb{N} \implies \frac{|1 - u_n|}{2^n} = 0 \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Esto último implica directamente que $1 - u_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por ende, $u_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, dado que $u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$, se verifica que

$$0 = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1$$

lo cual es una contradicción. Luego, no existe $u \in c_0$ con $||u|| = 1$ y $f(u) = 1 = ||u||$. $\square$

Problema 4

Demuestre que cualquier espacio vectorial no trivial E posee una base algebráica (o más conocida como una *Base de Hamel*).

Demostración. La idea de este ejercicio es usar el Lema de Zorn. Entonces, un primer paso será establecer una familia de conjuntos $\mathcal{E} \neq \varnothing$ dotada con una relación de orden parcial tal que cualquier cadena $C \subseteq \mathcal{E}$ tenga una cota superior.

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{E} := \{A \subseteq E\colon\ A \text{ es linealmente independiente}\}.$$

Como E es un espacio vectorial no trivial, se tiene la existencia de $x \in E \setminus \{0\}$, lo cual implica que $\{x\}$ es un conjunto linealmente independiente. Por ende, se verifica que $\{x\} \in \mathcal{E}$ lo cual concluye que $\mathcal{E} \neq \varnothing$.

Por otro lado, la familia $\mathcal{E}$ es parcialmente ordenado con la relación de contención $\subseteq$.

Sea $(I, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado arbitrario de índices y consideremos una cadena $\mathcal{C} := \{A_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{E}$. Podemos definir el conjunto

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Por un lado, sabemos que para todo $F \in \mathcal{C}$ se verifica

$$F \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A,$$

lo cual implica que A es una cota superior de $\mathcal{C}$. Falta probar que $A \in \mathcal{E}$, sin embargo, si suponemos que esto no es cierto, se verifica la existencia de ciertos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k \in A$ que no son linealmente independientes, sin embargo, recordemos que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ existe $i_j \in I$ con $v_j \in A_{i_j}$.

Entonces, como $\mathcal{C} := \{A_i\}_{i \in I}$ es una cadena, se verifica la existencia de $j_0 \in I$ con

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k} = A_{j_0}.$$

Entonces, dado que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ no puede ser linealmente independiente, A_{j_0} tampoco, lo cual es una contradicción. Entonces, A es un conjunto linealmente independiente y es una cota superior de $\mathcal{C}$.

Luego, el Lema de Zorn establece la existencia de $\mathcal{B} \in \mathcal{E}$ con $B \subseteq \mathcal{B}$ para todo $B \in \mathcal{E}$. Demostraremos que tal $\mathcal{B}$ es una base de E por contradicción. Es decir, $\mathcal{B}$ no genera todo E, lo cual implica que existe $v_0 \in E \setminus \langle \mathcal{B} \rangle$.

Entonces, tenemos que el conjunto $\mathcal{T} := \{v_0\} \cup \mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, y por ende, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ y $\mathcal{T} \in \mathcal{E}$ lo cual implicaría que $\mathcal{B}$ no es una cota maximal de $\mathcal{E}$, pero esto contradice lo establecido al principio del párrafo anterior.

Luego, $\mathcal{B}$ debe generar todo E lo cual implica que $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ siendo $\mathcal{B}$ un conjunto Linealmente independiente, por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base de E y se concluye lo pedido. $\square$

Problema 5

Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado. Demuestre que existe una base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in I}$ con $||e_i|| = 1$ para todo $i \in I$. Además, si E es de dimensión infinita, construya un funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ que no sea continuo.

Demostración. Sabemos del ejercicio anterior que existe una base $\{v_i\}_{i \in I}$ de E. Entonces, tenemos que $v_i \neq 0$ para tod $i \in I$ y esto nos sirve para definir

$$e_i := \frac{v_i}{||v_i||} \quad \text{para todo } i \in I,$$

el cual satisface $||e_i|| = 1$ para todo $i \in I$. Por otro lado, todo $x \in E$ verifica la existencia y unicidad de $\{\lambda_\ell\}_{\ell \in H} \subseteq \mathbb{R}$ y $\{v_\ell\}_{\ell \in H} \subseteq \mathcal{B}$ donde $H \subseteq I$ es finito tales que

$$x = \sum_{\ell \in H} \lambda_\ell v_\ell = \sum_{\ell \in H} r_\ell e_\ell$$

donde $r_\ell = ||v_\ell||\lambda_\ell$. Luego, como los λ_ℓ son únicos, los r_ℓ también lo son, por ende, $\{e_\ell\}$ es un conjunto linealmente independiente que genera todo E, entonces, demostramos que existe una base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in I}$ con $||e_i|| = 1$ para cada $i \in I$.

Como E es de dimensión infinita, sea $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ una base de E con I un conjunto de índices infinito, luego, existe $J \subseteq I$ numerable e infinito, es decir, existe una biyección $\phi : J \to \mathbb{N}$. Consideremos la función $h : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(e_i) := \begin{cases} \phi(i) & i \in J, \\ \\ 0 & i \in I \setminus J. \end{cases}$$

y su extensión $f : E \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \sum_{\ell \in H} \lambda_\ell h(e_\ell)$$

siendo $x = \sum\limits_{\ell \in H} \lambda_\ell e_\ell$ cualquier vector de E y $H \subseteq I$ un conjunto finito arbitrario. Tenemos que f es un funcional lineal por construcción.

Sin embargo, f no es continua, en efecto, si suponemos lo contrario, existe $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq L||x|| \quad \text{para todo } x \in E.$$

En particular, escojamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > L$, el cual existe gracias a la propiedad arquimediana y consideremos $i := \phi^{-1}(n) \in I$, entonces,

$$n = \phi(\phi^{-1}(n)) = \phi(i) = |f(e_i)| \leq L||e_i|| = L,$$

es decir, $n \leq L < n$ lo cual es una contradicción. Luego, f no es continua y se concluye la demostración. $\square$

Problema 6

Considere $n \in \mathbb{N}$ y un espacio vectorial E de dimensión n, suponga que $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E y asuma que $|| \cdot ||_2$ es una norma en E, el cual se define como

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

siendo $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ y cada tuplo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Calcule explícitamente $||f||_{E^\star}$ en términos de $f_i := f(e_i)$.

Observación: Este ejercicio nos da la facilidad de construir una gran familia de normas sobre un espacio vectorial finito-dimensional E emulando lo hecho en $\mathbb{R}^n$, las que además serán equivalentes entre sí por lo hecho en la ayudantía anterior. Se invita al lector a realizar el mismo ejercicio con normas distintas a la definida en este problema.

Solución. Demostraremos que

$$||f||_{E^\star} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}.$$

En efecto, $f = 0$, entonces, $f(e_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y además,

$$||f||_{E^\star} = 0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}$$

Por otro lado, si $f \neq 0$ y $x \in E$ con $||x||_2 = 1$, la desigualdad de Young junto con $f_i = f(e_i)$ establecen que

$$|f(x)| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\right) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|f_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}$$

y por ende,

$$||f||_{E^\star} = \sup_{||x||=1} |f(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}.$$

Por otro lado, dado que $f \neq 0$, existe $x \neq 0$ con $f(x) \neq 0$, siendo $x = r_1e_1 + \cdots + r_ne_n$ con $\{r_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, $f_{i_0} \neq 0$ para cierto i_0, pues, si suponemos lo contrario, es decir, $f_i = 0$ para todo i, se tiene que

$$f(x) = f\left(r_1e_1 + r_2e_2 + \cdots + r_ne_n\right) = r_1f_1 + r_2f_2 + \cdots + r_nf_n = 0$$

lo cual contradice que $f(x) \neq 0$. De este modo, tenemos que $\sum_{i=1}^n f_i^2 \neq 0$ y por ende, podemos escojer el vector

$$x = \frac{f_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}e^1 + \frac{f_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}e_2 + \cdots + \frac{f_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}e_n,$$

el cual verifica

$$||x|| = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{f_\ell^2}{\sum_{i=1}^n f_i^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}\left(\sum_{\ell=1}^{n} f_\ell^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\frac{f_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}e_1 + \frac{f_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}e_2 + \cdots + \frac{f_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}e_n\right) \\
&= \frac{f_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}f(e_1) + \frac{f_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}f(e_2) + \cdots + \frac{f_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}f(e_n) \\
&= \frac{f_1^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}} + \frac{f_2^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}} + \cdots + \frac{f_n^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2} = f(x) = |f(x)| \leq \sup_{||x||=1} |f(x)| = ||f||_{E^\star} \leq \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}$$

lo cual demuestra lo que se quería. □

Problema 7

Sea E un $\mathbb{R}-$e.v.n e I un conjunto de índices. Fije un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ de E y un subconjunto $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{R}$. Demuestre que son equivalentes:

(A) Existe algún $f \in E^\star$ tal que $f(x_i) = \alpha_i$ para todo $i \in I$.

(B) Existe una constante $M \geq 0$ tal que cualquier subconjunto finito $J \subseteq I$ y toda colección finita de números reales $\{\beta_j\}_{j\in J}$ verifican

$$\left|\sum_{j\in J} \beta_j \alpha_j\right| \leq M \left|\left|\sum_{j\in J} \beta_j x_j\right|\right|$$

Demostración. Demostremos primero (A) $\Longrightarrow$ (B).

Supongamos que $f \in E^\star$ es tal que $f(e_i) = \alpha_i$ para todo $i \in I$.

Por un lado, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M||x||$ para todo $x \in E$. En particular, si $J \subseteq I$ es un subconjunto finito de índices y $\{\beta_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\sum_{j\in J} \beta_j x_j \in E$ y por tanto,

$$\left|\sum_{j\in J} \beta_j \alpha_j\right| = \left|\sum_{j\in J} \beta_j f(x_j)\right| = \left|f\left(\sum_{j\in J} \beta_j x_j\right)\right| \leq M \left|\left|\sum_{j\in J} \beta_j x_j\right|\right|$$

lo cual prueba (B).

Para demostrar (B) $\Longrightarrow$ (A), consideremos $G := \langle \{x_i\}_{i\in I}\rangle$. Recordemos que cualquier vector $x \in G$ se puede escribir como

$$x = \sum_{j\in J} \beta_j x_j$$

siendo J un subconjunto finito de I mientras que $\beta_j \in \mathbb{R}$ para cualquier $j \in J$.

De este modo, la función $g : G \to \mathbb{R}$ definida por

$$g\left(\sum_{j\in J} \beta_j x_j\right) = \sum_{j\in J} \beta_j \alpha_j$$

de modo que si $x \in G$, tenemos que $x = \sum_{j\in J} \beta_j x_j$ con $\{\beta_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{R}$ y J un subconjunto de I, luego, por hipótesis tenemos que satisface que

$$|g(x)| = \left|\sum_{j\in J} \beta_j \alpha_j\right| \leq M \left|\left|\sum_{j\in J} \beta_j x_j\right|\right| = M||x||,$$

lo cual implica que $g \in G^\star$.

De este modo, podemos considerar el funcional sublineal $p : E \to \mathbb{R}$ definido por $p(x) = ||g||_{G^\star}||x||$, el cual verifica inmediatamente que $|g(x)| \leq ||g||_{G^\star}||x||$ para todo $x \in G$.

De este modo, el Teorema de Hahn-Banach analítico establece que existe $f : E \to \mathbb{R}$ con $f(u) = g(u)$ para todo $u \in G$ y $|f(x)| \leq p(x) = ||g||_{G^\star}||x||$ para todo $x \in E$. Más aún, se tiene $f(x_i) = \alpha_i$ para todo $i \in I$ y $f \in E^\star$ y demostramos (A). Con esto se concluye la demostración. □