AYUDANTÍA 1 - ANÁLISIS 2 POSTGRADO

DAVID URRUTIA VERGARA – GONZALO ROBLEDO VELOSO

En este contexto, $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ son dos $\mathbb{R}$–espacios vectoriales normados (o $\mathbb{R}$–e.v.n para abreviar).

Problema 1

Demuestre que si E es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, dadas dos normas cualesquiera $||\cdot||$ y $||\cdot||'$, entonces, existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1||x|| \leq ||x||' \leq C_2||x|| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demostración. Recordemos que en clase se vio que dada una norma $||\cdot||$ y una familia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de vectores linealmente independientes de E, entonces, existe $c > 0$ tal que

$$c\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|\right|,$$

para toda familia finita de reales $\{a_i\}_{i=1}^n$.

Entonces, supongamos que $\dim E = k < +\infty$ y $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es una base de E, entonces, existe $K_2 > 0$ tal que

$$K_2\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right|\right|,$$

para cualquier $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Ahora, dado que $E = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle$, tenemos que todo $x \in E$ verifica la existencia $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ con

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_k e_k,$$

además,

$$K_2\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right|\right| = ||x||.$$

De este modo, si escogemos $K := \max\{||e_j||'\}_{j=1}^n$ y $C_2 = \frac{K}{K_2}$, se verifica que

$$||x||' = \left|\left|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j\right|\right|' \leq \sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\,||e_j||' \leq \sum_{j=1}^{k} K|\lambda_j| \leq \frac{K}{K_2}\left|\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right|\right| = C_2||x||.$$

Luego, haciendo el mismo razonamiento al intercambiar $||\cdot||$ con $||\cdot||'$ se obtiene la existencia de $L_1 > 0$ tal que

$$||x|| \leq L_1||x||',$$

y por ende, al considerar $C_1 = \frac{1}{L_1}$, se verifica

$$C_1||x|| \leq ||x||' \leq C_2||x||,$$

para todo $x \in E$ lo cual demuestra lo que se pedía. □

Problema 2

Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entonces

$$||T\vec{x}||_F \leq ||T||\,||\vec{x}||_E \quad \text{para todo } \vec{x} \in E.$$

Demostración. Recordemos que

$$||T|| = \inf\{M > 0\colon ||T(x)||_F \leq M||x||_E \text{ para todo } x \in E\},$$

entonces, si $x = 0$, entonces, la desigualdad $||T(x)||_F \leq ||T||\,||x||_E$ es, de hecho, una igualdad por $T(x) = 0$. Por otro lado, si $M > 0$ tal que $||T(x)||_F \leq M||x||_E$ para todo $x \in E$, entonces, en particular, se tiene que para $x \neq 0$ se verifica

$$\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} \leq M$$

entonces, por la arbitrariedad de $M > 0$, se tiene que para todo $M > 0$ con$||T(v)||_F \leq M||v||_E$ para todo $v \in E$,

$$\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} \leq M,$$

y por tanto

$$\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} \leq \inf\{M > 0\colon ||T(x)||_F \leq M||x||_E \text{ para todo } x \in E\} = ||T||,$$

lo cual implica

$$||T(x)||_F \leq ||T||\,||x||_E,$$

para todo $x \neq 0$, entonces,

$$||T(x)||_F \leq ||T||\,||x||_E \quad \text{ para todo } x \in E,$$

y con ésto se concluye la demostración. □

Problema 3

Sean $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos espacios vectoriales normados y $T\colon E \to F$ una transformación lineal. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) T es un homeomorfismo,

(ii) T es epiyectiva y existen dos constantes positivias α y β tales que para todo $\vec{x} \in E$ se verifican las desigualdades:

$$\alpha||\vec{x}||_E \leq ||T(\vec{x})||_F \leq \beta||\vec{x}||_E.$$

Demostración. **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** Como T es un homeomorfismo y T es lineal, tenemos que que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, es decir, existe $\beta > 0$ tal que

$$||T(x)||_F \leq \beta||x||_E \quad \text{ todo } x \in E.$$

por otro lado, como T es un homeomorfismo, tenemos que T^{-1} es continua, además, la linealidad de T implica la linealidad de T^{-1}, lo cual implica además que $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$, es decir, existe $L > 0$ tal que

$$||T^{-1}(y)||_E \leq L||y||_F \quad \text{ para cualquier } y \in F.$$

En particular, si $x \in E$ e $y = T(x)$, se verifica

$$||x||_E = ||T^{-1}(T(x))||_E \leq L||T(x)||_F \quad \text{ para cualquier } x \in E.$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{L}||x||_E \leq ||T(x)||_F \quad \text{ para cualquier } x \in E.$$

de modo que al escoger $\alpha = \frac{1}{L} > 0$, se tiene que

$$\alpha||x||_E \leq ||T(x)||_F \leq \beta||x||_E \quad \text{ para todo } x \in E.$$

Además, como T es un homeomorfismo, se tiene que T es epiyectiva lo cual demuestra (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Sea T una transformación lineal sobreyectiva que verifica $\alpha||x||_E \leq ||T(x)||_F \leq \beta||x||_E$ para todo $x \in E$ y ciertos $\alpha, \beta > 0$. Entonces, inmediatamente tenemos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Por otro lado, si $x \in \ker T$, entonces,

$$0 \leq ||x||_E \leq \frac{1}{\alpha}||T(x)||_F = 0,$$

lo cual implica que $x = 0$ y por ende, T es inyectiva. Como T es sobreyectiva e inyectiva, tenemos que T es una biyección. Más aún, se puede demostrar que su inversa T^{-1} también es lineal. Por último, si $y \in F$, al escoger $x = T^{-1}(y)$ y $L = \frac{1}{\alpha}$, tenemos lo siguiente

$$||T^{-1}(y)||_E = ||x|| \leq \frac{1}{\alpha}||T(x)||_F = L||y||_F,$$

lo cual demuestra que $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. De este modo, podemos concluir que T y T^{-1} son continuas y por ende, T es un homeomorfismo de E a F lo cual prueba (i). Con ésto damos por finalizada la demostración □

Problema 4

Recordemos que dado un conjunto X y dos distancias d_1, d_2, estas son equivalentes si la función identidad $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es un homeomorfismo de espacios métricos. Use el ejercicio anterior para probar que si $|| \cdot ||$ y $|| \cdot ||'$ son dos normas en el $\mathbb{R}-$espacio vectorial E, entonces, estas son equivalentes (como metricas) si y sólo si existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 ||x||' \leq ||x|| \leq C_2 ||x||' \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demostración. Recordemos que $id : E \to E$ es un automorfismo de espacios vectoriales (es decir, id es una transformación lineal biyectiva de E en sí mismo). Entonces, las normas $|| \cdot ||$ y $|| \cdot ||'$ son equivalentes si y sólo si $id : (E, || \cdot ||) \to (E, || \cdot ||')$ es un homeomorfismo. La linealidad de id implica que $id : (E, || \cdot ||) \to (E, || \cdot ||')$ es un homeomorfismo si se verifica la existencia de $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 ||x||' \leq ||x|| \leq C_2 ||x||' \quad \text{para todo } x \in E.$$

En resumen, las normas $|| \cdot ||$ y $|| \cdot ||'$ son equivalentes si y sólo si

$$C_1 ||x||' \leq ||x|| \leq C_2 ||x||' \quad \text{para todo } x \in E.$$

lo cual demuestra lo que se quería. $\square$

Problema 5

Sea $(E, || \cdot ||_E)$ un $\mathbb{R}$–e.v.n. Dado $x_0 \in E$, la bola abierta con centro en x_0 y radio $r > 0$ se denota por $B(x_0, r)$. mientras que la bola cerrada con centro en x_0 y radio $r > 0$ se denota por $B[x_0, r]$.

a) Demuestre que $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$, donde $\overline{S}$ denota la clausura de un conjunto $S \subset E$.
b) Demuestre que $\text{Int}B[x_0, r] = B(x_0, r)$, donde $\text{Int}S$ denota el interior de un conjunto $S \subset E$.

Demostración de a). Demostraremos esto por doble contención.

Primero, recordemos que $B[x_0, r]$ es un subconjunto cerrado de E con $B(x_0, r) \subseteq B[x_0, r]$. Entonces, como la clausura de $B(x_0, r)$ es el cerrado más pequeño que contiene a $B(x_0, r)$, se tiene que

$$\overline{B(x_0, r)} \subseteq B[x_0, r].$$

Por otro lado, si tenemos que $x \in \overline{B(x_0, r)}$, entonces, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos en $B(\vec{x}_0, r)$ tal que $x_n \to x$. Demostraremos que $||x - x_0|| \leq r$. En efecto, como sabemos, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x - x_n|| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$, de este modo, si $n \geq N$, se tiene que

$$||x - x_0|| \leq ||x - x_n|| + ||x_n - x_0|| < \varepsilon + r$$

entonces,

$$||x - x_0|| < r + \varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0$$

De este modo, recordemos la propiedad $a < b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ implica $a \leq b$, la cual nos ayuda a deducir que

$$||x - x_0|| \leq r$$

lo que es equivalente a $x \in B[x_0, r]$ con lo cual se concluye que $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$ lo que termina la demostración. $\square$

Demostración de b). Al igual que antes, demostraremos esta igualdad de conjuntos por doble contención. Primeramente, recordemos que $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto de E que está contenido en $B[x_0, r]$ por ende,

$$B(x_0, r) \subseteq \text{Int}B[x_0, r],$$

pues, $IntB[x_0, r]$ es el abierto más grande que está contenido en $B[x_0, r]$.

Por otro lado, si $x \in \text{Int}B[x_0, r]$, entonces, existe $t > 0$ tal que $B(x, t) \subseteq B[x_0, r]$. Sin embargo, notemos que $||x - x_0|| \leq r$ por definición, entonces, tenemos dos posibilidades: $||x - x_0|| < r$ o $||x - x_0|| = r$. Si suponemos que el segundo caso es cierto, podemos considerar $u = x - x_0$ el cual verifica

$$x = x_0 + r \frac{u}{||u||}.$$

.

De este modo, consideremos el vector

$$y = x + \frac{t}{2} \frac{u}{||u||} = x_0 + \left(r + \frac{t}{2} \right) \frac{u}{||u||},$$

el cual satisface

$$||y - x|| = \frac{t}{2} < t,$$

es decir, $y \in B(x,t) \subseteq B[x_0,r]$. Sin embargo, notemos que

$$||x_0 - y|| = \frac{t}{2} + r > r$$

lo cual es una clara contradicción con $y \in B[x_0,r]$. Luego, la única opción posible es que $||x-x_0|| < r$ y por ende, $x \in B(x_0,r)$. Por lo tanto, tenemos que $\text{Int}B[x_0,r] \subseteq B(x_0,r)$ lo cual implica que $\text{Int}B[x_0,r] = B(x_0,r)$. □

Problema 6

Dado un espacio vectorial normado $(E, ||\cdot||_E)$. Demuestre que todo subespacio vectorial propio de E (es decir, que no es todo E) tiene interior vacío.

Demostración. Sea V un subespacio de E con $V \neq E$ y supongamos que tiene interior no vacío, es decir, existe $x \in V$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq V$. La hipótesis establece que $V \neq E$, es decir, existe $u \in E$ con $u \notin V$, lo cual implica que $u \neq 0$ (si u fuese el vector nulo, $u \in V$ inmediatamente, lo cual no es cierto). Entonces, podemos considerar el vector $y = x + \frac{r}{2}\frac{u}{||u||}$, el cual verifica

$$||y - x|| = \frac{r}{2} < r,$$

y por ende, $y \in B(x,r)$. Sin embargo, $y \notin V$, en efecto, si suponemos que $y \in V$, entonces, la suposición de que $x \in V$ combinado con que V es un subespacio vectorial de E implican que

$$u = \frac{2||u||}{r}(y - x) \in V,$$

lo cual contradice que $u \in V$. De este modo, hemos probado que $y \in B(x,r) \subseteq V$ y además, $y \notin V$, lo cual implica que $y \in V$ e $y \notin V$, lo cual nos conlleva a otra contradicción. Esto demuestra que no existe tal $x \in \text{Int}V$ lo cual equivale a que $\text{Int}V = \varnothing$. □

Problema 7

Recordemos que en $\mathcal{L}(E,F)$ se define la norma

$$||T|| := \inf\{M > 0 \colon ||T(x)||_F \leq M||x||_E \text{ para todo } x \in E\}.$$

Demuestre que $||T||$ define una norma sobre $\mathcal{L}(E,F)$.

Demostración. Debemos demostrar que $||\cdot||$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $||T|| \geq 0$ para todo $T \in \mathcal{L}(E,F)$.
(ii) $||T|| = 0$ si y sólo si $T = 0$.
(iii) $||\lambda T|| = |\lambda|\,||T||$ para todo $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iv) $||T + S|| \leq ||T|| + ||S||$ para todo $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$.

Para demostrar (i), tenemos que si $M > 0$ es tal que $||T(v)||_F \leq M||v||_E$ para todo $v \in E$, en particular, satisface que $M > 0$, entonces, como el ínfimo es una cota inferior maximal, se tiene que

$$0 \leq \inf\{M > 0 \colon ||T(x)||_F \leq M||x||_E \text{ para todo } x \in E\}$$

supongamos que $T = 0$, es decir, $T(v) = 0_F$ para todo $v \in E$, entonces, nótese que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ satisface $||T(v)||_F \leq \frac{1}{n}||v||_E$ para todo $v \in E$, entonces,

$$||T|| \leq \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y como el ínfimo es la cota inferior minimal, se tiene que

$$0 \leq ||T|| \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0.$$

lo cual implica que $||T|| = 0$.

Por otro lado, si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es tal que $||T|| = 0$, entonces,

$$0 = ||T|| = \inf\{M > 0 \colon ||T(x)|| \leq M||x|| \text{ para todo } x \in E\}.$$

Entonces, dado que T es lineal, tenemos que $T(0_E) = 0_F$. Sin embargo, si $x \neq 0_E$, se tiene que para todo $M > 0$ con $||T(v)||_E \leq M||v||_E$ para todo $v \in E$, en particular,

$$\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} \leq M,$$

entonces,

$$\sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \neq 0\right\} \leq M$$

para todo $M > 0$ con $||T(v)||_F \leq M||v||_E$. Entonces,

$$\sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \neq 0\right\} \leq \inf\{M > 0\colon ||T(x)|| \leq M||x|| \text{ para todo } x \in E\} = ||T|| = 0,$$

es decir,

$$\sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \neq 0\right\} \leq 0,$$

y por ende,

$$\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} \leq \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \neq 0\right\} \leq 0,$$

de modo que $||T(x)||_F = 0$ para todo $x \in E$ con $x \neq 0_E$ y por lo tanto, $T(x) = 0$ para todo $x \in E$. Entonces, $T = 0$. De este modo, demostramos (ii).

Para demostrar (iii), consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ es tal que $||T(v)||_F \leq M||v||_E$ para todo $v \in E$. Si $\lambda = 0$, entonces, $\lambda T(v) = 0$ para todo $v \in E$ y además, de (ii) se tiene que para todo $M > 0$, se verifica

$$||\lambda T(v)||_E = 0 \leq M||v||_E \quad \text{para todo } v \in E$$

entonces,

$$||\lambda T|| = \inf\{M > 0\colon ||\lambda T(v)||_F \leq M||v||_E \text{ para todo } v \in E\} \leq 0$$

y por ende, $||\lambda T|| = 0 = \lambda||T||$ para $\lambda = 0$.

En cambio, si $\lambda \neq 0$ y $M > 0$ es tal que $||T(v)||_F \leq M||v||_E$ para todo $v \in E$, se tiene que

$$||\lambda T(v)||_E = |\lambda|\,||T(v)||_F \leq |\lambda|\,M||v||_E.$$

lo cual implica que $|\lambda|M \in \{K > 0\colon ||\lambda T(v)||_F \leq M||v||_E \text{ para todo } v \in E\}$ y por tanto,

$$||\lambda T|| \leq |\lambda|M$$

para todo $M > 0$ con $||T(v)||_F \leq M||v||_E$, de modo que

$$||\lambda T|| \leq |\lambda| \inf\{K > 0\colon ||T(v)||_F \leq M||v||_E \text{ para todo } v \in E\} = |\lambda|\,||T||.$$

Por otro lado, si $M \in \{K > 0\colon ||\lambda T(v)||_F \leq M||v||_E \text{ para todo } v \in E\}$, entonces,

$$|\lambda|\,||T(v)||_F = ||\lambda T(v)||_F \leq M||v||_E$$

de modo que $||T(v)||_F \leq \frac{M}{|\lambda|}||v||_E$ y por lo tanto, $\frac{M}{|\lambda|} \in \{K > 0\colon ||T(v)||_F \leq M||v||_E \text{ para todo } v \in E\}$, luego,

$$||T|| \leq \frac{M}{|\lambda|},$$

lo cual implica que $|\lambda|\,||T|| \leq M$ para todo $M > 0$ con $||\lambda T(v)||_E \leq M||v||_E$ de modo que

$$|\lambda|\,||T|| \leq \inf\{K > 0\colon ||\lambda T(v)||_F \leq M||v||_E \text{ para todo } v \in E\} = ||\lambda T||$$

y por ende, $||\lambda T|| = |\lambda|\,||T||$ y se prueba (iii).

Para probar (iv), supongamos que $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces, si $M, K > 0$ son tales que $||T(v)||_F \leq M||v||_E$ y $||S(v)||_F \leq K||v||_E$ para todo $v \in E$, se verifica la cota

$$||(T + S)(v)|| \leq ||T(v)||_F + ||S(v)||_F \leq M||v||_E + K||v||_F = (M + K)||v||_E$$

y por ende, $M + K \in \{R > 0\colon ||(T + S)(v)||_F \leq R||v||_E \text{ para todo } v \in E\}$. Lo cual implica que

$$||T + S|| \leq M + K$$

para todo $M, K > 0$ tales que $||T(v)||_F \leq M||v||_E$ y $||S(v)||_F \leq K||v||_E$. Luego, si definimos los conjuntos

$$A = \{M > 0\colon ||T(x)||_F \leq M||x||_E \text{ para todo } x \in E\} \quad \text{y} \quad B = \{K > 0\colon ||S(x)||_F \leq M||x||_E \text{ para todo } x \in E\},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} ||T + S|| &\leq \inf\{M + K\colon ||T(x)||_F \leq M||x||_E \text{ y } ||S(x)||_F \leq K||x||_E \text{ para todo } x \in E\} \\ &= \inf(A + B) = \inf A + \inf B = ||T|| + ||S||, \end{aligned}$$

lo cual concluye que $||\cdot||$ es una norma en $\mathcal{L}(E, F)$. $\square$

Problema 8

Sea $||\cdot||$ como en el ejercicio anterior. Demuestre las siguientes identidades:

$$||T|| = \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\} = \sup\{||T(x)||_F : x \in E \text{ con } ||x||_E = 1\}$$

Demostración. Partamos demostrando la identidad del medio. Recordemos que en clase se probó la identidad

$$||T|| = \sup\{||T(x)||_F : ||x||_E \leq 1\},$$

de modo que si $x \neq 0$, entonces, $||\frac{x}{||x||_E}||_E = \frac{||x||_E}{||x||_E} = 1$ y por tanto, $\frac{x}{||x||} \in B[0,1]$, luego,

$$\left|\left|T\left(\frac{x}{||x||_E}\right)\right|\right| \leq \sup\{||T(x)||_F : ||x||_E \leq 1\} = ||T|| \quad \text{para todo } x \in E \setminus \{0_E\},$$

y por ende,

$$\sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\} \leq ||T||.$$

Por otro lado, si $x \in B[0,1]$, entonces, tenemos dos posibilidades: $x = 0_E$ y $x \neq 0_E$. La primera igualdad establece que

$$0 = ||0_F||_F = ||T(0_E)||_F \leq \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\}.$$

Por otro lado, si $x \neq 0_E$, se tiene que $||x||_E \leq 1$ implica que $1 \leq \frac{1}{||x||_E}$, de este modo

$$||T(x)||_F \leq \frac{||T(x)||_F}{||x||_E} \leq \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$$

es decir, para todo $x \in B[0,1]$ se tiene que

$$||T(x)||_F \leq \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$$

entonces,

$$||T|| = \sup\{||T(x)||_F : ||x||_E \leq 1\} \leq \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$$

lo cual prueba que

$$||T|| \leq \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\} \leq ||T||$$

lo cual implica que se verifica la igualdad

$$||T|| = \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\}.$$

Para demostrar que

$$||T|| = \sup\{||T(x)||_F : ||x|| = 1\}$$

solo nos basta con probar que

$$\sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\} = \sup\{||T(x)||_F : ||x|| = 1\}.$$

En efecto, si $||x|| = 1$, en particular, se tiene que $x \neq 0$ y por ende,

$$||T(x)||_F = \frac{||T(x)||_F}{||x||_E} \leq \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$$

y por tanto,

$$\sup\{||T(x)||_F : ||x||_E = 1\} \leq \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \in E \setminus \{0_E\}\right\}.$$

Por otro lado, si $x \neq 0$, se tiene que $\frac{x}{||x||} = 1$ y por consiguiente

$$\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} = \left|\left|T\left(\frac{x}{||x||_E}\right)\right|\right|_F \leq \sup\{||T(x)||_F : ||x||_E = 1\},$$

en particular, se tiene que

$$\sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \neq 0\right\} \leq \sup\{||T(x)||_F : ||x||_E = 1\},$$

por ende,

$$||T|| = \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E} : x \neq 0\right\} = \sup\{||T(x)||_F : ||x||_E = 1\},$$

lo cual prueba lo que se pedía. $\square$

Problema 9

Sean $T_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(F,G)$. Demuestre que $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(E,G)$ y que $||T_2 \circ T_2|| \leq ||T_2||\,||T_1||$.

Proof. Del ejercicio anterior, se tiene que

$$||T_1|| = \sup\{||T_1(x)||_F : ||x||_E = 1\} \quad \text{y} \quad ||T_1|| = \sup\{||T_2(x)||_G : ||x||_F = 1\},$$

entonces, del Problema 2, se tiene que si $||x||_E = 1$, entonces

$$||T_2(T_1(x))||_G \leq ||T_2||\,||T_1(x)||_F \leq ||T_2||\,||T_1||\,||x||_E = ||T_2||\,||T_1||.$$

De modo que para todo $x \in E$ con $||x||_E = 1$ se verifica la estimación

$$||T_2(T_1(x))||_G \leq ||T_2||\,||T_1||$$

y por ende, $||T_2||\,||T_1||$ es cota superior del conjunto

$$\{||T_2(T_1(x))||_G : x \in E \text{ y } ||x||_E = 1\}$$

y por ende,

$$||T_2 \circ T_1|| = \sup\{||T_2(T_1(x))||_G : x \in E \text{ y } ||x||_E = 1\} \leq ||T_2||\,||T_1||$$

que es lo que se quería probar. $\square$

Problema 10

Sea $(F, ||\cdot||_E)$ un $\mathbb{R}$–espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(F,F)$ tal que $||T|| < 1$.

a) Demuestre que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(F,F)$, donde $T^0 = I$ (operador identidad) y

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ veces}}$$

b) Demuestre que $I - T$ es invertible y que

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Demostración de a). En efecto, por $||T|| < 1$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ||T||^n = \frac{1}{1 - ||T||},$$

es decir, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ es absolutamente convergente y teniendo que $\mathcal{L}(F,F)$ es un espacio de Banach, dicha serie converge en $\mathcal{L}(F,F)$, esto implica que $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n \in \mathcal{L}(F,F)$. $\square$

Demostración de b). Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $T : F \to F$ es una transformación lineal, entonces, para cada $v \in F$

$$\begin{aligned}\left((I-T) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)\right)(v) &= \sum_{k=0}^{n} T^k(v) - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1}(v) \\ &= v - T^{n+1}(v) = (I - T^{n+1})(v)\end{aligned}$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(I-T)\sum_{k=0}^{n} T^k = I - T^{n+1}. \tag{1}$$

y además

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right) \circ (I-T)\circ\right)(v) = \sum_{k=0}^{n} T^k(v) - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1}(v)$$
$$= v - T^{n+1}(v) = (I - T^{n+1})(v)$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$

(2) $$\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I-T) = I - T^{n+1} = (I-T)\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right).$$

Así, se tiene que,

$$\left|\left|I - (I-T)\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)\right|\right| = \left|\left|I - \left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I-T)\right|\right| = ||T^{n+1}|| \leq ||T||^{n+1}$$

y con ésto se obtiene el siguiente límite:

$$0 \leq \left|\left|I - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} T^k\right)(I-T)\right|\right| = \left|\left|I - \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I-T)\right|\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\left|I - \left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I-T)\right|\right|$$
$$\leq \lim_{n\to+\infty} ||T||^{n+1} = 0$$

donde lo último se obtiene de $||T|| < 1$. Entonces,

$$\left|\left|I - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} T^k\right)(I-T)\right|\right| = \left|\left|I - (I-T)\sum_{k=0}^{+\infty} T^k\right|\right| = 0$$

y obtenemos que $I = (I-T)\sum_{k=0}^{+\infty} T^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} T^k\right)(I-T)$ lo cual implica que $I-T$ es invertible cuya inversa es $\sum_{k=0}^{+\infty} T^k \in \mathcal{L}(F,F)$ y probamos lo que se quería. $\square$

Problema 14

Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y considere dos subconjuntos compactos no vacíos K y L. Demuestre que la unión de todas las rectas uniendo un vector de K con otro de L forman un conjunto compacto.

Demostración. Es decir, tenemos que demostrar que el conjunto

$$R := \{tx + (1-t)y \colon x \in A, y \in B \text{ y } t \in [0,1]\},$$

es un conjunto compacto de E.

Sabemos que $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}$, luego, la compacidad de los conjuntos K y L implica que

$$C := [0,1] \times A \times B,$$

es un conjunto compacto de $\mathbb{R} \times E^2$, donde este conjunto es un espacio vectorial dotado con la norma

$$N(t,x,y) = |t| + ||x|| + ||y||.$$

Luego, podemos definir la función $f : \mathbb{R} \times E^2 \to E$ como

$$f(t,x,y) := tx + (1-t)y,$$

la cual corresponde a una función continua. Por último, sabemos que

$$f([0,1] \times A \times B) = f(C) = \{tx + (1-t)y \colon t \in [0,1], x \in A \quad \text{e } y \in B\} = R,$$

y dado que C es compacto y f es continua, se concluye que R es un conjunto compacto. $\square$